La Géométrie des Transformations
dans l'apprentissage des Mathématiques

Article de Madame **HENDRICKX**, chargée de mission, paru dans le numéro 54 d'octobre 2005 des Nouvelles de l'Observatoire, Publication de la Commission d'Observation et de Pilotage de l'Enseignement organisé par la Communauté française.

Site www.restode.cfwb.be / Ressources / Publications Revues / Les nouvelles de l'Observatoire

GROS PLAN SUR...

Les transformations du plan
Des outils au service de la découverte des propriétés des figures et solides géométriques

Dans le courant de cette année scolaire 2004-2005, plusieurs journées de formation destinées successivement aux titulaires des classes de troisième maternelle et de première année primaire ont porté sur la géométrie des transformations. Ces dernières servent d'outils pour découvrir et/ou démontrer les propriétés des figures et des solides géométriques.
Un bref descriptif (un bref coup de pinceau) brosse quelques caractéristiques des quatre journées de formation destinées aux enseignants de première année primaire qui ont eu lieu au CAF en mars et avril: insolites, parfois déstabilisantes mais rigoureuses en théorie mathématique, précieuses en démarches d'apprentissage, riches en matériel et support didactiques et surtout uniques dans le modèle d'enseignement qui privilégie le raisonnement et l'argumentation à long terme, de 5 à 18 ans et au-delà!.
Un tandem complémentaire, Michel Demal (professeur de mathématiques attaché au département pédagogique de la H.E.C.F.H.- Mons) et Danielle Popeler (institutrice primaire), allie à merveille les aspects théoriques et pédagogiques de l'enseignement de la géométrie des transformations répondant aux exigences des socles de compétences. Les deux guides ouvrent les portes de ce monde fascinant où évoluent les figures et solides géométriques ainsi que les transformations du plan et de l'espace que nous croyons parfois connaître et maîtriser. Et pourtant! Certaines illustrations interpellent et réajustent des convictions!

Première journée, premières découvertes!

Pour débuter, Michel Demal insiste sur la connaissance et la maîtrise théorique des concepts à enseigner aux élèves et sur les rouages des démarches dynamisées.

« Que faut-il enseigner? Quels sont les savoir-faire à développer ? »

Michel Demal souligne que la géométrie des transformations est en parfait accord avec les socles de compétences, dont il extrait certains passages parmi les plus significatifs. Il souligne: « le dénombrement des faces, d'arêtes, de sommets conduit au plan, aux droites, aux points et à l'étude de leurs relations...Des manipulations et l'observation d'objets, de dessins contribuent à caractériser des transformations du plan. Agrandir, réduire des figures associent un phénomène géométrique à la notion de proportionnalité.... Plus tard, on compare les propriétés (celles des « objets géométriques »), on les relie à celles des transformations. On en arrive ainsi à enchaîner des énoncés et on apprend progressivement à démontrer. »Cette vision de la géométrie, insiste-t-il, est demandée par les socles de

compétences et le monde scientifique.
Elle ne présente que des avantages ; en effet, « la matérialisation des transformations et des premières démonstrations permet, en donnant du sens, de familiariser dès le début de la scolarité les élèves à une activité géométrique complète (observer-manipuler- comparer- construire- dégager des régularités - établir des analogies- émettre des propositions- les mettre en doute - les démontrer et/ou les réfuter - ...). »
Quant aux savoir-faire, Michel Demal exploite les compétences transversales qu'il décline en quatre points :
« (1) analyser et comprendre un message, (2) résoudre, raisonner et argumenter, (3) appliquer et généraliser,
(4) structurer et synthétiser ». Il précise que ces compétences équivalentes aux règles et principes qui définissent l'activité mathématique permettent d'initier les enfants à ceux qui régissent la démarche scientifique jusque et y compris la notion de preuve et de démonstration. De plus, il ajoute que ces nouvelles exigences ne sont pas sans conséquence sur les premiers éléments et les premières règles de logique à présenter progressivement et au fur et à mesure des besoins, dès la première primaire.

Il cite notamment : les quantificateurs universels et existentiels; les conjonctions « et » et « ou » ; les notions de causalité, d'inférence, d'équivalence, d'argumentation; les notions de définitions et de propriétés; la négation de propositions ; ...

Quels sont les procédés méthodologiques à activer et qui doivent évoluer en fonction de l'âge des enfants ?

A cette deuxième question, Michel Demal décrit les principes qui ont guidé la construction du cours proposé aux enfants, de la troisième maternelle à la deuxième année du secondaire (période que l'on qualifie actuellement de période de formation de base).

Premier levier, l'**enseignement en spirale** se construit le plus tôt possible, sur des notions qui présentent un intérêt permanent pour tous les élèves tout au long de leur formation. Au travers de différentes approches, ces notions sont présentées à plusieurs reprises, en amplifiant progressivement les contenus. Enfin, l'étude doit débuter à un niveau de base où les concepts sont manipulés par l'élève, même s'il n'en perçoit pas immédiatement la portée finale. A titre d'exemple, Michel Demal et Danielle Popeler constatent que, travaillés durant trois années consécutives, les concepts de « polygone » et « polyèdre » ne nécessitent plus le besoin d'être redéfinis dès la 4ème année primaire. Un simple rappel suffit!

L'**enseignement génétique** constitue le second levier. Michel Demal poursuit en insistant sur la nécessité de respecter le niveau des connaissances et des capacités intellectuelles des enfants. Développer des raisonnements rigoureux et des démonstrations adaptées au

niveau des enfants ...sont autant de clés de voûte de ce type d'enseignement prôné.
Michel Demal souligne que, au niveau 5/8 ans, l'approche de la géométrie des transformations se construit au départ de l'imaginaire des enfants. Il illustre la démarche: les premières règles de la démarche scientifique, les premiers éléments de logique et les premiers concepts mathématiques sont rencontrés progressivement au moyen d'une histoire contée (« La planète des petits hommes citrons ») mise au point par Danielle Popeler pour faire entrer immédiatement les enfants dans le « monde de la géométrie » où les termes utilisés sont spécifiques à ce cours.

Michel Demal insiste sur les **savoir-faire à exercer dès le plus jeune âge**: raisonner et ce qui est neuf dans le primaire, argumenter, démontrer selon les règles de la démarche scientifique. Il précise que l'on ne peut se contenter d'observer et de décrire les caractéristiques des objets géométriques au primaire si on souhaite développer une cohérence et une continuité de mode de pensée tout au long de la formation. Dans le secondaire, les démonstrations revêtent un aspect formel, symbolique (puisque écrites en langage mathématique), démarche d'un abord difficile si les jeunes n'y sont pas familiarisés dès le primaire.
Il va de soi qu'à ce niveau, les démonstrations restent du domaine de l'activité collective, orale et informelle.

Elles se construisent peu à peu, les enfants se familiarisent graduellement au raisonnement, à l'argumentation, ce qui nécessite un ordre dans la présentation de la matière, le respect des premières règles de logique formelle (exemples: la définition d'un polygone ne peut se limiter à: «les côtés sont droits», mais bien «tous les côtés sont droits» – figure hybride: «il existe au moins un côté droit et au moins un côté courbe» et non «il existe des côtés droits et des côtés courbes»).

Pour illustrer le propos, Michel Demal reprend **le concept du dénombrement des faces**: « Le dénombrement des faces, vu sous l'angle mathématique, ne se limite pas à un simple comptage. Il s'identifie à la recherche d'une stratégie qui permet de trouver, par raisonnement et argumentation, ce nombre de faces. Avec les enfants, le matériel est une aide précieuse et incontournable. L'enseignant les guide par un questionnement, il leur inculque progressivement une technique d'observation , il leur apprend à voir (notamment en 3 dimensions).

Jouons le jeu! Combien de faces pour constituer un cube? Où sont-elles? Comment les voit-on? (L'observation est facilitée par les couleurs des faces). Combien d'arêtes? Combien de sommets? ...
Après ces aspects théoriques incontournables, suivons à présent le travail pratique (continuum) assuré par Danielle Popeler et opéré, semaine après semaine durant une année scolaire dans une classe de première année primaire.

La planète des petits hommes citrons

Dès septembre, via l'histoire contée de « La planète des petits hommes citrons », le premier thème abordé, « figures et solides géométriques », vise à aiguiser le regard des enfants, à implanter progressivement des images mentales, à installer les premières caractéristiques délimitant les figures et solides ainsi que les premiers éléments de logique.
Pour ce faire, Danielle Popeler conte aux enfants, l'histoire d'une planète étrange, habitée par des « bonshommes citrons » (concrétisés par des balles de tennis) pour lesquels le roi doit faire construire des « enclos » (des figures géométriques de formes différentes). Regroupés autour d'une table, les enfants construisent dès lors un premier enclos sur un modèle donné, en utilisant des pailles. C'est l'occasion de déterminer le nombre, la forme et la longueur des côtés de cet enclos ainsi que la place des sommets (on ne parle pas d'angle à ce stade). L'attention des enfants est attirée sur le nombre de côtés se réunissant en chaque sommet (condition nécessaire pour construire un polygone). L'intérieur de l'enclos (surface) est différenciée de son contour (périmètre). Les séquences suivantes sont consacrées à la construction individuelle d'enclos de formes diversifiées (figures géométriques). Elles favorisent la compréhension et affinent l'expression orale. Les premiers éléments de logique s'installent de manière concrète, dès le départ, à propos des formes d'enclos (exemples : au niveau des quantificateurs universels : pour tout..., au

niveau des qualificateurs existentiels : il existe au moins ...).
Par un jeu de questionnement orienté, Danielle Popeler stimule les enfants à verbaliser leurs observations relatives aux figures construites.

En exploitant des erreurs de manière constructive, en utilisant des pictogrammes (symbolisant le côté droit ou courbe), des classements s'organisent.

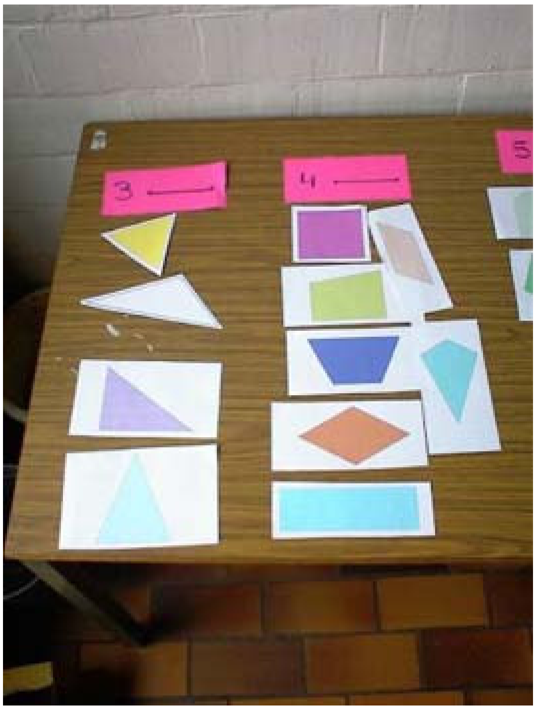
Lorsque les observations aboutissent à un niveau de maîtrise du classement par tous les enfants, Danielle introduit intuitivement la **terminologie ad hoc aux figures géométriques planes fermées** : polygones, figures rondes, figures hybrides (figures qui possèdent au moins un côté droit et un côté courbe).
L'exploitation collective, semi-collective, individuelle permet aussi de familiariser les enfants à **l'utilisation d'outils de classement comme les tableaux à double entrée**. Des exercices individuels à valeur d'évaluation formative permettent de réinvestir tous les concepts travaillés, en activité collective, de manière progressive et toujours intégrée.
Sensibilisés à l'observation et à la création des figures géométriques planes fermées, les enfants déterminent alors, par analogie, **les différents types de faces connues sur des solides géométriques** (les polyèdres, les corps ronds, les corps hybrides). Cette démarche les conduit par la suite à reconnaître les solides et à en établir les premiers classements.

Toujours en activité collective, devant un étalage riche en solides divers (formes, tailles, matériaux), les enfants manipulent, recherchent par tâtonnements, expriment leurs constats, établissent les correspondances entre tous les éléments à leur portée en jouant sur les similitudes, en prenant conscience de l'aspect de proportionnalité en dégageant les caractères semblables ou non de certains solides géométriques (en exprimant les ressemblances ou les différences dans des termes simples tels que: même grandeur, plus grand ou plus petit).
En cours d'exposé, Danielle Popeler insiste sur la nécessité de procurer aux enfants une vue la plus large possible des modèles de solides, de favoriser la mobilité des enfants pour leur permettre de les manipuler, d'établir les relations entre les objets pour aboutir, après un travail de réflexion, au dégagement des caractéristiques et au premier classement des solides géométriques en polyèdres (toutes les faces sont des polygones), corps ronds (toutes les faces sont des faces courbes –non planes- et/ou des faces planes rondes) et corps hybrides (dont au moins une face est hybride) . Les traces laissées dans le sable par l'impression des faces d'un solide est un moyen supplémentaire de préparer le classement: les faces planes laissent une empreinte plate tandis que celle des faces non planes forme un creux.
Pour suivre cette approche des solides, les enfants sont initiés à leur observation sous différents angles de vue, en manipulant du matériel construit avec des plaquettes évidées, des chalumeaux (solides transparents) puis des plaquettes pleines (faces pleines). Par la répétition des divers positionnements appliqués à plusieurs objets, ils affinent leur regard, leur perception pour construire mentalement des représentations ou « photos » des objets en perspective. Cette démarche leur permet d'accéder à la lecture de représentations de solides suivant les données conventionnelles (trait plein - ce qu'on « voit » devant- ou pointillé – ce qu'on « voit » derrière).

Dès novembre les transformations planes (thème 2) dévoilent leurs premières caractéristiques.

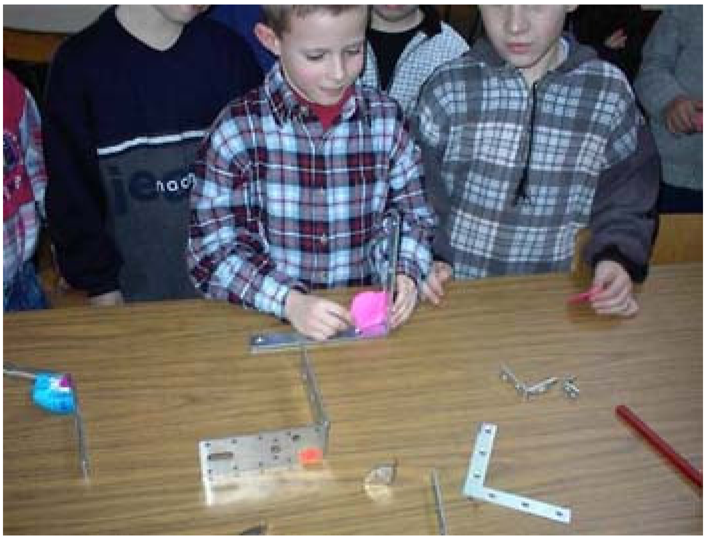
Pour le développement de ce thème, un outil de référence domine : **le transparent**, toujours omniprésent, tant dans les activités de découverte (en collectif) que dans celles d'application (en individuel)! A travers le grand nombre de manipulations au départ de dessins variés (fruits, animaux, objets...), il sera tantôt glissé (notion de déplacement – le transparent ne quitte pas le plan), tantôt retourné (notion de retournement –le transparent ne peut être retourné qu'une seule fois).

Dans un premier temps, les enfants comparent une série de figures communes à un modèle de référence sur transparent (exemple: le dessin d'une tortue). En utilisant l'outil « transparent », ils identifient de la sorte les figures déformées et les figures non déformées (par étirement ou compression). **De l'observation de figures proportionnelles agrandies et/ou réduites, de figures isométriques, des figures déplacées ou retournées**, ils s'approprient naturellement des images mentales correctes et un langage approprié à l'étude des transformations et à leurs utilisations dans les démonstrations des propriétés des figures géométriques. Ainsi et à titre d'exemple, la propriété dominante des transformations qui réside dans la conservation des distances par superposition est assimilée naturellement dès le plus jeune âge.



Dès lors, par la suite, les enfants intégreront avec la même aisance, par **la pratique de ces stratégies d'apprentissage, les caractéristiques liées à l'étude des figures géométriques** (dans le plan) **et des solides géométriques** (dans l'espace) **au niveau de la conservation de la forme** (isométries, similitudes agrandies ou réduites) **ou de sa modification** (compressions, étirements...) **.** Il en va de même des isométries du plan (translations, rotations, symétries centrales, symétries orthogonales, symétries glissées).
En géométrie, le développement du thème des transformations a un impact direct sur les démonstrations des propriétés des figures qui s'articulent, elles aussi, selon le même procédé: superposer par des transformations et utiliser les propriétés de celles-ci.
De plus, elles agissent globalement au sens où une même transformation permet de démontrer en une fois plusieurs propriétés (à titre d'exemple, à partir de la 6e année primaire, la superposition d'un parallélogramme à lui-même par une rotation de 180° permet de démontrer - en utilisant donc uniquement les notions conservées par les rotations de 180° - les propriétés de l'isométrie des angles opposés, des côtés opposés; de l'intersection des diagonales en leur milieu, de l'intersection des médianes en leur milieu; ...).

En décembre, le troisième thème touche aux notions de longueur et d'angle.
Rechercher des « côtés droits » de même longueur dans une série de propositions est une démarche que les enfants effectuent avec, une fois de plus, leur outil de référence: le transparent! Par la suite, ils « jouent » avec les notions de comparaison de longueurs (moins long que, plus long que, le plus court, le plus long, de même longueur...). Dans le développement de ce thème, de nombreuses compétences s'exercent aussi dans le domaine des grandeurs (comme le mesurage avec la règle graduée).



Le stratagème de la boîte magique

Pour initier ce chapitre, Danielle recourt au stratagème de la boîte magique qui modifie les longueurs (chalumeaux de longueurs différentes à l'entrée et à la sortie) ou qui se mue en « machine qui transforme » en courbes les côtés droits (symbolisés par des fils métalliques) et inversement. Cette même machine a aussi le pouvoir de modifier l'écartement d'un angle (symbolisé par différentes pièces métalliques, de quincaillerie---équerres modifiées ou non). Pour intégrer cette **notion d'angle**, Danielle conduit les enfants par un cheminement qui leur permet de travailler sur différents modèles, d'exploiter leur schéma corporel (écartement des mains, des bras, des jambes), de fabriquer des angles par pliage avec du papier (notamment l'angle droit), de procéder par superposition ou emboîtement de pièces (dans l'espace). Autre outil de référence utilisé: l'éventail (garniture de desserts). Le déploiement de ses branches articulées laisse apparaître un écartement qui passe progressivement de l'angle aigu, au droit, à l'obtus avec une amplitude de zéro à 360 degrés. Par emboîtement ou superposition, l'angle droit- matérialisé par le collage d'un éventail ouvert à l'angle droit d'une équerre métallique- sert de modèle pour l'observation des angles dans les figures géométriques construites en tiges de meccano et par la suite dans celles des solides. Avec l'angle droit dessiné sur transparent, les enfants repèrent et identifient par **la suite des angles droits, aigus ou obtus représentés dans le plan**. Ils sont aussi aptes à les comparer en se basant sur le seul critère de l'écartement (indépendamment de la longueur des segments et de l'orientation de l'angle) avant de les localiser dans différentes figures planes qui leur sont proposées.

Vers le mois de janvier, les droites font l'objet d'une analyse plus pointue. Ainsi, leurs positions horizontale, verticale ou oblique et leurs positions relatives (parallélisme et verticalité) sont approfondies. Pour familiariser les enfants à **la notion de verticalité**, Danielle utilise le principe du fil à plomb qu'elle applique à plusieurs bouts de laine lestés (avec un bouton) et fixés sur un manche de brosse. Par ce biais, à **la notion de direction** s'associe aussi celle de positions relatives de deux segments de droite (ici, le parallélisme se conserve quel que soient l'écartement des bouts de laine, l'inclinaison du manche de brosse. Une fois de plus, tous ces concepts relèvent d'observations, d'un jeu de questions-réponses entre l'enseignante et les élèves, qui débouchent sur des exercices pratiques afin de construire les notions de verticalité, d'horizontalité, de droites obliques, parallèles et de rapport à la construction de l'angle droit.

En février, riches de tout un potentiel d'observations et de propriétés relatives aux droites et aux angles, les enfants entament progressivement le classement des polygones en fonction du nombre de côtés. Le classement porte sur des triangles, des quadrilatères, des polygones à plus de 4 côtés . Il se poursuit par la construction de ces polygones à l'aide de segments représentés sur transparents (cette technique met aussi en évidence que la construction n'est pas faisable avec moins de trois transparents ou segments). Au comptage du nombre de côtés est associé celui des sommets et des angles pour, in fine, étiqueter les formes et classer les polygones. De nombreux concepts sont réinvestis et brassés avant d'être engagés dans l'exploration des polyèdres. Repérage des polygones sur des solides, comptage du nombre de faces et détermination de leur nature (carré, triangle) assoient déjà les préalables à l'étude du cube, du tétraèdre régulier, de la pyramide.

Vers mars débute l'analyse des premières caractéristiques des figures géométriques : les quadrilatères (les carrés et rectangles quelconques) et le disque.
Une fois de plus, au fil des analyses toujours basées sur l'expérimentation et l'exploitation d'un matériel concret très diversifié, Danielle explique que des propriétés, des éléments de logique émergent et permettent aux enfants de 1ère année primaire de **découvrir de petits théorèmes**. Ainsi, dans le développement d'une vision globale et spiralée, les élèves constatent que dans un quadrilatère qui possède 2 paires de côtés parallèles, si un des angles devient droit, les trois autres le deviennent également (notion de causalité). En effet, il est important, en mathématique, de distinguer les définitions des propriétés , il est tout aussi important d'établir les liens de dépendance, de causalité, entre « définition et propriété ».

Ainsi dans la progression des apprentissages, de la 3ème maternelle à la 2ème année du secondaire, afin de dégager les propriétés communes à tous les membres d'une même famille, il s'agit dans une première phase (en 1ère et 2ème années primaires) d'établir les qualités de chaque figure, une à une, pour aboutir, en seconde phase, à la recherche des qualités communes à tous les membres de la famille considérée.

Danielle Popeler illustre l'exposé par les différentes démarches. Sur un premier panneau, les enfants isolent le carré parmi les représentations de différents quadrilatères. Un second panneau leur présente des carrés de différentes dimensions, dont certains sur pointe: à l'aide d'un transparent (superposition), les caractéristiques du carré se découvrent (4 côtés isométriques, 4 angles droits). Assemblages de quatre tiges de meccano, constructions avec des bandelettes aux bords parallèles, avec des bâtonnets puis avec des segments de droite dessinés sur transparents, dessins sur papier tramé, constructions avec des chalumeaux ...autant de passages concrets , d'essais et d'erreurs, qui dans le respect du rythme des apprentissages, permettent la découverte des conditions déterminantes des carrés et la comparaison avec les losanges quelconques et rectangles quelconques (dont l'étude de ces derniers est identique).
Les exercices individuels permettent toujours de réinvestir des concepts construits au fil de l'année, de procéder aux corrections et ajustements nécessaires. Dans la variété des activités, des ponts sont toujours assurés entre les représentations dans le plan et l'espace afin de construire les liens entre les figures et les solides : les enfants sont ici invités à repérer les carrés (ou les rectangles, ou les disques) sur le matériel varié construit en bois, en cure-dents, en plaquettes pleines ou évidées (matériel polydron), en chalumeaux ...

Dans le courant du mois de mai, les frises font l'objet de construction qui passionnent les enfants. La notion de frise est découverte collectivement au départ de l'analyse d'exemples simples (dessins de voiture, de tortue) dans des frises du type translation. Toujours avec l'emploi de transparents (par déplacement ou retournement), les enfants sont familiarisés avec des frises du type translation et symétrie orthogonale d'axe vertical.

Le dernier thème abordé en première année porte sur des déplacements et des transformations de paysages. Le sujet est introduit par l'observation illustrée du phénomène de la rotation de la terre et de propriété de conservation des positions relatives (place des continents, océans ...), quel que soit le moment de la journée. Par analogie et au travers de différentes manipulations et jeux, les enfants intègrent le caractère constant de la position relative de tous les éléments qui composent un paysage lors de son déplacement (ainsi que les propriétés de proportionnalité dans les cas d'agrandissement ou de réduction).
Pour clôturer les quatre journées de formation consacrées à la première primaire, Michel Demal et Danielle Popeler synthétisent et insistent sur quelques constats, nés de leur expérience de terrain. Ils ont en effet accompagné les mêmes enfants pendant toute leur scolarité primaire. Au cours de ces six années, les enfants suivent l'évolution de la matière sans difficulté, sans lassitude. Ils acquièrent un langage précis, la terminologie adéquate au langage mathématique. Le rapprochement à la vie quotidienne n'est pas toujours possible en géométrie, il faut oser faire de la géométrie pour elle-même.

Elle permet de s'élever du domaine du concret à celui de l'abstraction, de se familiariser avec la notion d'argumentation, d'apprendre à repérer des discours correctement étayés, ... La méthodologie s'inscrit dans la lignée des socles de compétences, repose sur un cadre théorique progressivement structuré qui donne du sens aux apprentissages. Elle définit l'ordre des matières à analyser et « impose » de se familiariser avec des éléments de logique formelle.

La richesse du matériel didactique stimule les apprentissages par l'éveil des sens (la main et l'œil), par le partage d'expériences collectives, par le jeu constructif des essais/erreurs, par les nombreuses manipulations actives des enfants qui les mettent en contact direct avec des formes et des solides (ou objets) inhabituels dans une approche de type « classique ». Cette approche, tout au long de son développement, ouvre aussi la porte sur d'autres domaines (les grandeurs, les nombres, les fractions...).

A partir de situations réelles (non nécessairement utilitaires), les enfants manifestent plus de facilités à vivre, comprendre et formaliser les concepts. Ils apprennent à sortir du monde réel et perceptible, à émettre des hypothèses, à analyser, à découvrir leurs erreurs, à défendre vis-à-vis des autres leurs points de vue, à remettre en question les acquis précédents. Bref, la géométrie des transformations est une discipline qui sollicite l'ensemble de la personne: représentation dans l'espace, sens de l'orientation, de l'observation, de l'analyse, esprit déductif, esprit critique...

Une formation dont tous les participants sortent certainement enrichis d'un précieux bagage tant dans l'approche méthodologique que dans les outils facilement transférables dans les activités de classe. Cet article n'est qu'une approche du sujet. Les « informations pédagogiques » vous proposeront bientôt un regard complémentaire posé par Madame Germaine Denis lors des journées de formation spécifiques à l'enseignement maternel. Vous désirez, vous aussi, en savoir plus? N'hésitez pas à visiter le site et à consulter le catalogue des formations!

M. Hendrickx
Chargée de mission
Avec l'aimable collaboration de :
Monsieur M. Demal, professeur de mathématiques à la H.E.C.F. du Hainaut-Mons (Département pédagogique), chargé d'enseignement à l'U.M.H.
Madame D. Popeler, institutrice primaire

Pour plus d'informations : www.uvgt.net

LES PRINCIPES DE L'ENSEIGNEMENT EN SPIRALE

Les trois principes de l'enseignement en spirale, proposés par J.C. Bruner dans les années soixante et rappelés par F. Buekenhout lors d'un colloque international sur l'enseignement de la géométrie, ont influencé la construction du cours que nous proposons. Ces principes que tout curriculum scolaire doit, selon Bruner, respecter sont les suivants :

- Principe 1 - « Les matières (« et le savoir-faire ») que nous décidons d'enseigner doivent être d'un intérêt permanent pour tous les élèves au cours de toute leur formation et ce qui est important doit apparaître le plus tôt et le plus souvent possible. »
- Principe 2 - « Les principaux sujets méritent d'être étudiés plusieurs fois, chaque nouvelle présentation incluant à la fois de nouvelles approches et un plus haut degré de sophistication. »
- Principe 3 - « L'étude doit débuter à un niveau de base où les concepts sont manipulés par l'élève, même s'il n'en perçoit pas immédiatement la portée finale. Néanmoins, l'élève ne doit être amené à continuer à exercer ses capacités mathématiques à un niveau de base que si, par la suite, il est capable de progresser à un niveau supérieur, ce qui signifie qu'il soit capable de réfléchir sur ses capacités de base. »

LES PRINCIPES DE L'ENSEIGNEMENT GÉNÉTIQUE

Le troisième principe de l'enseignement en spirale montre l'importance « de partir du terrain » des élèves. Ce respect du niveau de connaissances et des capacités intellectuelles des enfants, nous nous sommes efforcés de le rencontrer en intégrant les principes de l'enseignement en spirale à ceux de l'enseignement génétique.
La théorie de la « méthode génétique » fut développée et co-fondée par F. Klein, O. Toeplitz H. Freudenthal, A. Krygowska, A. Wittenberg, M. Wagenschein, J. Piaget, J. Bruner ainsi que D. et P.M. Van Hiele. La caractéristique essentielle pour tous ces auteurs est que seul le processus de mathématisation, et non le produit fini, permet de comprendre et d'apprendre correctement les mathématiques.

Cette méthode a notamment été diffusée par E. Wittmann. Pour lui, « enseigner les mathématiques, c'est faire des mathématiques avec les élèves dans le but de cultiver, d'enrichir leur compréhension de la réalité ; dans cette approche des mathématiques, l'accent est mis à la fois sur les composantes du développement de l'apprenant et sur celles du développement de la matière. » Pour atteindre ces objectifs, il considère que « la « méthode génétique » doit avoir les caractéristiques suivantes :

- il faut se référer aux connaissances préalables des personnes concernées ;
- il faut intégrer des raisonnements dans des contextes de problèmes globaux au sein et en dehors des mathématiques ;
- il faut arriver à des raisonnements rigoureux à partir d'éléments intuitifs et heuristiques ;
- il faut arriver à une motivation constante et à une continuité permanente. »

Dès lors, pour lui, la réussite de cette méthode dans l'enseignement suppose :

- « de constituer un tout cohérent ;
- de couvrir une liste de notions de base avec une bonne maîtrise du savoir-faire ;
- d'inclure des démonstrations abordables par les élèves et les professeurs ;
- que l'enseignement puisse se faire dans le temps imparti ;

- que l'effort exigé du professeur ne soit pas augmenté. »

Pour E. Wittmann d'ailleurs, une initiation complète à la pensée mathématique (en géométrie) par la méthode génétique doit, dès l'école primaire, non seulement se concevoir sur base de problèmes utilitaires (« en dehors des mathématiques »), mais également sur base de problèmes pris au « sein » de la mathématique incluant des raisonnements rigoureux et des démonstrations adaptées au niveau des enfants.

LES SITUATIONS-PROBLÈMES UTILITAIRES ET LES SITUATIONS-PROBLÈMES PURES

La méthodologie actuellement prônée pour l'initiation aux mathématiques à l'école primaire est celle des situations-problèmes utilitaires. De plus, ces situations-problèmes présentées aux enfants sont des situations qui ne demandent généralement pas d'utiliser des concepts théoriques rencontrés précédemment ni d'argumenter les observations. Cette approche des mathématiques, pour enrichissante et indispensable qu'elle soit, pourrait laisser croire aux enfants :

1. qu'ils sont capables seuls de résoudre les problèmes sans utiliser les notions rencontrées auparavant ;
2. qu'il n'est pas indispensable de stocker en mémoire les concepts déjà rencontrés, alors que la mémoire est un des moteurs de tout travail intellectuel ;
3. qu'il n'existe pas de liens entre les concepts puisqu'ils ne sont pour ainsi dire jamais transférés d'une situation à l'autre.

De ce fait, les enfants n'ont qu'une vision ponctuelle et fragmentaire de l'activité mathématique puisque l'accent n'est mis que sur l'observation, la manipulation, la construction, le dessin, la description.

Or, comme le précise B. Charlot : « il ne faudrait pas considérer uniquement les mathématiques et la pensée mathématique comme une boîte à outils pour résoudre des problèmes de la vie quotidienne. » Il ajoute même : « qu'il est très difficile de travailler à partir du concret et de l'utile, de sorte que l'on propose souvent aux élèves du pseudo-concret, du pseudo-utile qui les embrouille et les détourne davantage encore de l'activité mathématique » ; il continue en affirmant qu'il croit « qu'une démarche de construction du concept mathématique doit s'appuyer sur un problème intéressant en tant que tel et non sur un besoin utilitaire d'une solution au problème posé. »

Cette dernière approche de la mathématique est qualifiée d'approche par les situations-problèmes pures, par opposition aux situations-problèmes utilitaires. Nous l'avons également mise en pratique pour débuter la plupart des nouveaux thèmes. Cette méthode, non seulement est très bien acceptée par les enfants, mais facilite la découverte d'autres concepts apparentés, ce qui permet de mettre en évidence les liens les unissant et d'habituer les enfants à la notion de « théorie déductive ». Nous ne réfutons pas les situations-problèmes utilitaires, car celles-ci permettent d'approfondir et d'affiner le sens des concepts mathématiques rencontrés. Toutefois, nous sommes convaincus qu'il est souhaitable, au primaire, d'aborder en premier lieu les concepts géométriques dans le cadre de situations-problèmes pures Dès lors, pour lui, la réussite de cette méthode dans l'enseignement suppose :

- « de constituer un tout cohérent ;
- de couvrir une liste de notions de base avec une bonne maîtrise du savoir-faire ;
- d'inclure des démonstrations abordables par les élèves et les professeurs ;
- que l'enseignement puisse se faire dans le temps imparti ;

- que l'effort exigé du professeur ne soit pas augmenté. »

Pour E. Wittmann d'ailleurs, une initiation complète à la pensée mathématique (en géométrie) par la méthode génétique doit, dès l'école primaire, non seulement se concevoir sur base de problèmes utilitaires (« en dehors des mathématiques »), mais également sur base de problèmes pris au « sein » de la mathématique, incluant des raisonnements rigoureux et des démonstrations adaptées au niveau des enfants avant de les rencontrer dans des situations-problèmes utilitaires si on veut que les élèves prennent conscience de l'enchaînement des matières, de la continuité des méthodes et de la nécessité de maîtriser les concepts vus antérieurement.

De plus, nous sommes de plus en plus convaincus qu'aborder la géométrie uniquement par les situations-problèmes utilitaires renforce les inégalités à l'accès aux concepts et au « jeu » mathématique car seuls les élèves « subtils » sont capables d'utiliser, de s'approprier et de retenir, à travers les résultats utilitaires, les concepts géométriques sous-jacents.

L'approche inverse montre que les moins « perspicaces » ou ceux qui ont des difficultés de passage à la phase d'abstraction accèdent aux solutions utilitaires en utilisant à bon escient les concepts abordés auparavant.