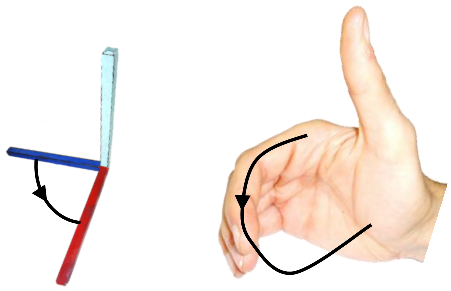
HAUTE ECOLE EN HAINAUT

Cellule de Géométrie

Campus pédagogique

Mathématiques élémentaires



Peut-on encore et toujours ignorer dans l'enseignement obligatoire les notions géométriques indispensables à la compréhension des évolutions scientifiques et technologiques actuelles?

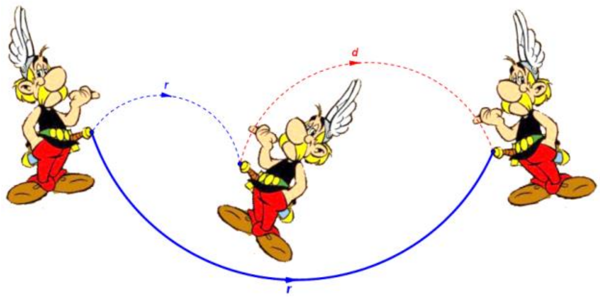
ou

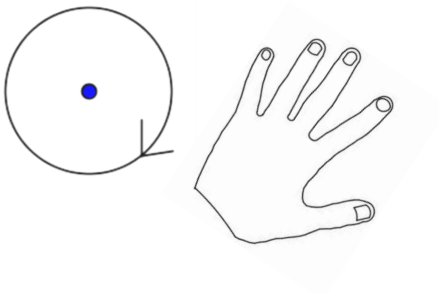
Une géométrie pour les 5 à 18 ans: Laquelle, comment et pourquoi?

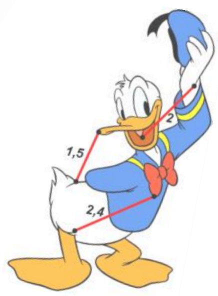
"Le savant doit ordonner. On fait la science avec des faits comme une maison avec des pierres, mais une accumulation de faits n'est pas plus une science qu'un tas de pierres n'est une maison."

Cette affirmation d'Henri Poincaré sur la construction de la science vaut aussi pour son enseignement.

Jean Sivardière







FÉDÉRATION WALLONIE-BRUXELLES

COLLOQUE DES MATHÉMATIQUES

PALAIS DES CONGRÈS DE LIÈGE

14 & 15 NOVEMBRE 2013

H.E.H. - Campus Pédagogique
Boulevard Albert-Elisabeth, 2
7000 Mons (Belgique)

Mail: geometrie@hecfh.be
Site: www.hecfh.be/cellulegeometrie

Cellule de Géométrie

La plupart des disciplines scientifiques (chimie, biologie, physique, cristallographie, robotique…) recourent aujourd'hui largement **aux notions de transformations du plan et de l'espace, de symétries au sens large, d'orientation du plan, d'orientation de l'espace, d'objets orientés, de polyèdres convexes à faces polygonales régulières…**

Afin de permettre à tout élève d'acquérir les bases indispensables pour entreprendre des études supérieures scientifiques de son choix ou comprendre les réalités scientifiques et technologiques qui l'entourent, il est nécessaire, dans un souci d'équité sociale et de démocratisation des études, qu'une alphabétisation aux notions de géométrie actuelle soit enseignée dès le plus jeune âge. Force est de constater que notre enseignement obligatoire actuel ne remplit pas ce souhait pourtant parfaitement légitime.

Les techniques d'enseignement en spirale et génétique développées par J.S. BRUNER et E. WITTMANN permettent de familiariser les enfants, dès 5 ans, à ces outils mathématiques essentiels, grâce à un cours de géométrie qui assure une cohérence, une continuité et une progressivité des matières et des méthodes scientifiques sur toute la scolarité obligatoire.

Dans l'exposé, nous présenterons les concepts géométriques actuels clés, leur logique et leur utilité en nous basant sur des expériences menées depuis plus de 20 ans dans des classes réelles. Nous décrirons aussi la méthodologie adoptée et le matériel didactique utilisé en fonction de la maturité des élèves.

Des documents pédagogiques et des extensions théoriques ainsi que les plans du cours de géométrie pour les 5/15 ans se trouvent sur les sites de la Cellule de la Géométrie et de l'UVGT:

www.hecfh.be/cellulegeometrie

www.uvgt.net

Une géométrie pour les jeunes de 5 à 18 ans: Laquelle, pourquoi et comment?

Plan

"*Sans la science, on ne peut rien comprendre aujourd'hui au monde moderne.*

Rien n'est plus important que de donner aux jeunes l'éducation (scientifique) dont ils ont besoin, qui fera d'eux des hommes et des femmes libres, capables de comprendre l'Univers qui les entoure et sa signification.

Il le faut, d'urgence, avant que des gourous, des marchands, des adorateurs de légendes ou des illuminés aient le temps de s'emparer d'eux.

Qu'ils aient des savants le vrai savoir…"

Extrait de "Soyez savants, devenez prophètes"- éd. Odile Jacob.
Georges CHARPAK est prix NOBEL (1992) de physique et physicien au CERN.
Roland OMNES est physicien théoricien et professeur émérite à la Faculté des Sciences de Paris XI - ORSAY.

"*Le savant doit ordonner. On fait la science avec des faits comme une maison avec des pierres, mais une accumulation de faits n'est pas plus une science qu'un tas de pierres n'est une maison.*"

Cette affirmation d'Henri POINCARE sur la construction de la science vaut aussi pour son enseignement.

Jean SIVARDIERE
Docteur en sciences, ingénieur au Commissariat à l'Énergie Atomique de Grenoble, physicien de la matière condensée, chargé de cours à l'Université Joseph Fourier.

I. LAQUELLE?

1. La Géométrie des Transformations

Il existe actuellement dans notre société un important paradoxe entre, d'une part, "*le souhait de former tout citoyen, pour qu'il comprenne les réalités scientifiques et technologiques qui l'entourent*" et, d'autre part, "*le refus de cette même société à inclure dans l'enseignement obligatoire, les outils géométriques nécessaires à la compréhension de ces réalités scientifiques et technologiques.*"

Ainsi, il est triste de constater que les élèves qui sortent actuellement ou qui sortiront des études secondaires (même de math-sciences fortes) n'ont ou n'auront quasi jamais (à quelques très rares exceptions près) la possibilité d'aborder les notions géométriques nécessaires pour "approcher" les principes et concepts géométriques qui sous-tendent les justifications de réalités scientifiques telles que:

- le critère de classement des cristaux;
- le concept géométrique utilisé par le Prix Nobel de Médecine (1997) Stanley. B. PRUSINER pour résoudre le problème de la maladie de la vache folle (la maladie de CREUTZFELDT-JAKOB)?
- le polyèdre convexe qui a permis aux Prix Nobel de chimie (1996) Harold KROTO, Robert CURL et Richard SMALLEY d'imaginer l'existence des fullerènes et en particulier le fameux Carbonne 60;
- les critères géométriques permettant de distinguer les molécules chirales (les molécules comme nos deux mains) des molécules achirales;
- l'idée géométrique qui a permis de comprendre les problèmes de malformations, dans les années 1960, des bébés dits "bébés SOFTENON" (Thalidomide);
- le principe géométrique (1894) sur lequel se basent les scientifiques (physiciens et chimiste) pour déterminer les propriétés d'un système (Principe de Pierre CURIE – Prix Nobel de physique en 1903 en collaboration avec son épouse Marie SKLODOWSKA);
- l'idée géométrique qui a permis à Brout-Englert et Higgs d'imaginer l'existence du Boson scalaire (François ENGLERT et Peter HIGGS Prix Nobel de physique 2013);
- le critère du classement scientifique (le classement de Johnson) des polyèdres convexes à faces régulières;
- le critère de classement des 7 types de frises;
- le critère de classement des 17 types de tapisseries (pavages périodiques du plan);
- …

Il n'est, dès lors, guère surprenant que:

- un nombre important d'élèves qui abordent des études supérieures du type scientifique se sentent perdus (désorientés) par rapport aux concepts géométriques actuels que les chimistes, les biologistes, les médecins, les physiciens, les cristallographes, manipulent pour étayer leurs théories puisque ces concepts géométriques ne seront quasi jamais approchés durant leurs formations primaire et secondaire;
- que peu d'élèves sortant du secondaire s'orientent vers des études à tendance scientifique puisqu'il est de réputation notoire que les concepts géométriques ne sont pas rencontrés dans l'enseignement obligatoire.

Ce n'est pourtant pas faute d'appels de scientifiques de tout haut niveau pour qu'une véritable formation géométrique efficace et utile, en concordance avec les évolutions scientifiques et technologiques actuelles, soit donnée aux élèves de l'enseignement obligatoire. À ce propos citons, entre autres, Francis BUEKENHOUT, géomètre Belge de niveau international et membre de la classe des sciences de l'académie Royale de Belgique.

"*Une autre géométrie élémentaire connaît une explosion dans les domaines les plus divers comme la chimie, la cristallographie, la biologie, la technologie, l'architecture, la robotique... La liste n'est pas exhaustive, toutes les sciences, au sens le plus large, sont concernées, de même que les arts et la culture en général. Il est urgent que la géométrie cesse de se replier sur un réduit minuscule et sans ambition, sur un statut de science morte. Il faut que la géométrie participe au développement de la science, de la technologie et de la culture.*"

Francis BUEKENHOUT

Cette "autre géométrie" s'appelle "***La Géométrie des Transformations***" et prend ses origines dans la théorie des groupes de symétries, dans le célèbre "Programme d'ERLANGEN de 1872" de Félix KLEIN (1849-1925) ainsi que dans les travaux de David HILBERT (1862-1943) sur les invariants. Cette géométrie n'est pas à confondre avec l'étude des transformations géométriques pour elles-mêmes comme trop vues à l'époque des mathématiques modernes dans notre enseignement.

Dans cette géométrie, les transformations sont perçues comme des outils qui permettent, grâce à leurs propriétés, de:

- découvrir et/ou démontrer les propriétés des objets géométriques du plan et de l'espace;
- créer des figures ayant des régularités "répétitives" (frises, rosaces, tapisseries…);
- classer des objets du plan et de l'espace (cristallographie, polyèdres à faces régulières, frises, rosaces, tapisseries…);
- percevoir si un objet est orienté ou non-orienté (paires d'objets énantiomères, formes "gauche" ou "droite" d'un objet, molécules chirales);
- créer des objets (snub-cube, snub-dodécaèdre);
- …

Cette géométrie se base sur les 3 axes suivants:

1. les figures et les solides géométriques;
2. les transformations du plan et de l'espace;
3. le concept qui "relie" les propriétés des transformations aux propriétés des objets, c'est-à-dire la notion de "***symétrie au sens large***" ou d'"***automorphisme***".

   Par automorphisme, il faut comprendre la notion simple de "***transformation qui superpose un objet à lui-même tout en conservant sa structure***"***.***

Pour ce dernier point, plusieurs autres personnalités du monde scientifique attirent aussi l'attention sur l'importance fondamentale du concept de "***symétrie au sens large***" ou d'"***automorphisme***" en sciences et en mathématiques.

À ce sujet, ils précisent:

"*La symétrie est un aspect fascinant de la nature, mais c'est aussi un concept scientifique fondamental qui a envahi les mathématiques, la physique, la chimie et jusqu'à la biologie. Peut-être Paul VALERY y songeait-il quand il écrivait: 'Il n'y a pas de choses simples, mais il y a une manière simple de voir les choses'".*

Jean SIVARDIERE

"*La symétrie (scientifique) est un outil de notre perception car elle permet de réduire de manière importante les informations nécessaires à la connaissance globale d'un objet, d'une figure, d'un événement. Pourtant, elle n'est pas enfermée dans une spécialité mais apparaît plutôt comme un concept transversal relevant aussi bien des sciences exactes que des sciences du vivant, voire des disciplines artistiques."*

Gilles COHEN – TANNOUDJI (prix Nobel de physique 1997) et Yves SECQUIN

"*Les modèles de symétrie sont intrinsèques à tous les aspects de la perception et semblent jouer un rôle essentiel dans les processus créatifs à la fois en sciences et en arts. Sans une conscience de l'importance de tels concepts abstraits pour les réponses cathartiques qui étayent l'effort humain, il est douteux que les présentes tentatives désespérées faites en vue d'améliorer la quantité et la qualité des relations (en recherche scientifique et développement ou en arts) ne conduisent à rien d'autre que l'échec.*"

Harry W. KROTO (Prix Nobel de chimie 1996)

Précisons que cette vision de la géométrie est aussi "réclamée" dans les socles de compétences puisqu'il y est précisé à la page 28: "*[…] on compare les propriétés des familles de figures, on les relie à celles des transformations. On en arrive ainsi à enchainer des énoncés et on apprend progressivement à démontrer.*" Le concept qui relie les propriétés des objets aux propriétés des transformations est, comme dit précédemment, la notion de symétrie au sens large ou d'automorphisme.

Ajoutons encore (pour nos amis français) que ce type de géométrie est aussi cité comme fondamental pour la formation scientifique des jeunes dans "*L'Enseignement des sciences mathématiques*" du Rapport au Ministre de l'Education nationale sous la direction de Jean-Pierre KAHANE et publié chez Odile Jacob en mars 2002. À la page 89 du rapport, il est précisé que la géométrie actuelle (la Géométrie des Transformations) prend ses origines dans le fameux programme d'ERLANGEN de Félix KLEIN de 1872.

2. Symétries au sens large ou Automorphismes d'objets géométriques

Sur base des remarques ci-dessus, il semble évident que le concept de symétrie au sens large ou d'automorphisme pour les objets **de l'espace** est actuellement en mathématiques, en sciences, un des concepts transversaux importants, si pas le plus important.

Ce concept est-il néanmoins difficilement compréhensible? La réponse est oui et non. Oui, si le concept est "plaqué" tel quel et si aucune initiation progressive n'est prévue et non si à contrario, une initiation intuitive et progressive est organisée avant l'approche formelle. À titre d'exemple, illustrons cette affirmation à partir de l'exemple d'un cube.

2.1. Les automorphismes d'un cube

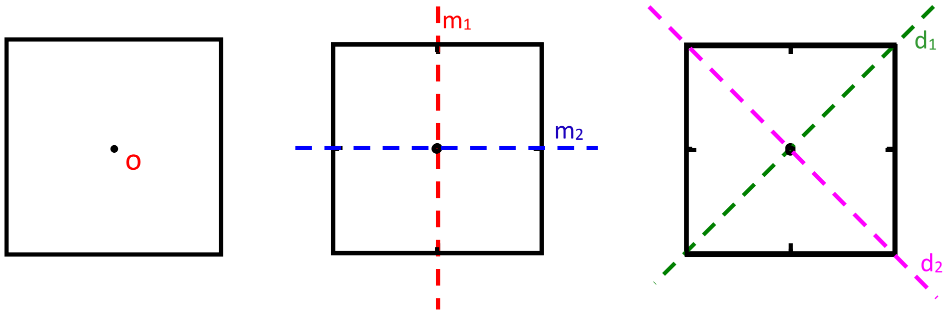
Avec des élèves de l'enseignement obligatoire, il semble souhaitable de débuter par la recherche des symétries au sens large d'un carré ainsi que par la recherche de l'orbite d'un point non particulier d'un carré.

2.1.1. Les automorphismes d'un carré ou symétries au sens large d'un carré

Il existe exactement 8 transformations (isométries) qui superposent tout carré à lui-même tout en conservant sa structure:

- 4 "déplacements" ou 4 auto$^+$: les rotations de $\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}$ et $\frac{4}{4}$ de tour de centre O;
- 4 "retournements" ou 4 auto$^-$: les symétries orthogonales dont les droites de points fixes sont les médianes et les diagonales.

On résume les auto$^+$ en affirmant que le point "O" est un centre de rotation d'ordre 4 et les auto$^-$ en affirmant que les droites médianes et les droites diagonales d'un carré sont des axes de symétrie du carré.



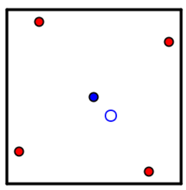
auto (C) — auto$^+$ $(r_{1/4}\,;\, r_{2/4}\,;\, r_{3/4}\,;\, r_{4/4})$

auto (C) — auto$^-$ $(s_{m1}\,;\, s_{m2}\,;\, s_{d1}\,;\, s_{d2})$

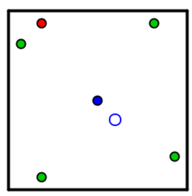
2.1.2. Orbite d'un point non-particulier d'un carré

L'ensemble des points ayant les mêmes caractéristiques porte le nom d'orbite d'un point et est obtenu en recherchant les images de ce point par tous les automorphismes de l'objet.

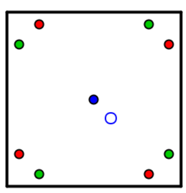
Par auto$^+$ $(r_{1/4}\,;\, r_{2/4}\,;\, r_{3/4}\,;\, r_{4/4})$



Par auto$^-$ $(s_{m1}\,;\, s_{m2}\,;\, s_{d1}\,;\, s_{d2})$



Orbite d'un point non-particulier d'un carré par déplacements et retournements.



L'orbite d'un point non-particulier dans un carré est donc formée de 8 points obtenus par les 8 automorphismes d'un carré

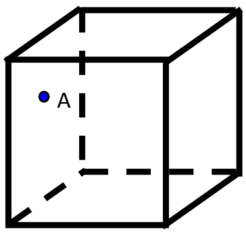
2.1.3. Recherche des automorphismes d'un cube

Les automorphismes sont des transformations qui superposent un objet à lui-même tout en conservant la structure de celui-ci. Il en résulte que tout point de l'objet est envoyé, par un automorphisme, sur un point de mêmes caractéristiques.

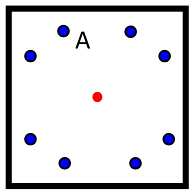
La détermination du nombre d'automorphismes (Auto^+ et Auto^-) d'un solide peut donc se faire par la recherche du nombre de points ayant les mêmes caractéristiques qu'un ***point non-particulier*** donné du solide (il y a autant d'automorphismes que le nombre de points non-particuliers ayant les mêmes caractéristiques).

2.2. Détermination du nombre de points dans l'orbite d'un point non-particulier d'un cube:

Soit A un "point non particulier"[1] d'une face carrée d'un cube.

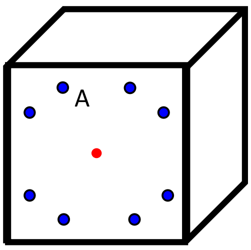


Il y a exactement huit points de cette face carrée qui possèdent les mêmes caractéristiques que le point A (ce sont les 8 points obtenus à partir des 8 automorphismes de cette face carrée).



Comme un cube est formé de six carrés, il y a donc 48 (6 x 8) points du cube qui possèdent les mêmes caractéristiques que le point A.

Comme tout automorphisme superpose le cube à lui-même tout en appliquant un point sur un point de même caractéristique, on en conclut que le nombre d'automorphismes du cube est de 48.



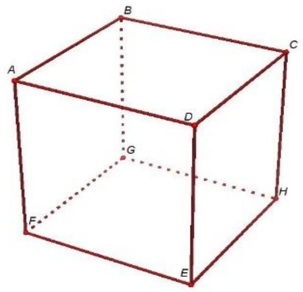
Le théorème de LAGRANGE montre qu'il existe autant d'automorphismes du type "déplacements" que du type "retournements" si l'objet possède au moins un automorphisme du type retournement.

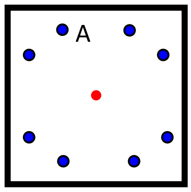
Dès lors, comme un cube possède au moins un plan de symétrie, on a:

$$\textbf{Auto (C) = 48} \begin{cases} \nearrow \ \textbf{Auto}^+ \textbf{ = 24} \\ \searrow \ \textbf{Auto}^- \textbf{ = 24} \end{cases}$$

[1] Par point non particulier, on entend un point qui ne peut pas être un sommet, un milieu d'arête, un centre de face, un point d'une bissectrice, d'une médiatrice…

2.3. Détermination des automorphismes d'un cube[2]





À partir d'un "point non particulier" A du cube, il y a 48 autres points du cube qui possèdent les mêmes caractéristiques que le point A. On en déduit donc qu'il existe 48 automorphismes. Comme il existe au moins un retournement de l'espace qui superpose le cube à lui-même, du théorème de LAGRANGE, on peut déduire qu'il existe le même nombre de retournements de l'espace que de déplacements de l'espace qui superposent ce cube à lui-même.

- **Les déplacements**

TYPES	CENTRE/AXE/PLAN	NOMBRE ASSOCIÉ AUX TYPES
- L'identité		1
- Les rotations liées aux axes d'ordre 4 ($\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$ et $\frac{3}{4}$)	Droite joignant le centre de deux faces opposées	3 x 3 rotations
- Les rotations liées aux axes d'ordre 3 ($\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$)	Droite joignant deux sommets opposés	4 x 2 rotations
- Les rotations liées aux axes d'ordre 2 ($\frac{1}{2}$)	Droite joignant le milieu de deux arêtes opposées	6 x 1 rotation
		$\Rightarrow$ 24 déplacements

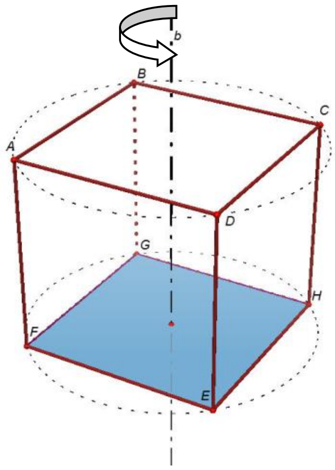
- **Les retournements**

TYPES	CENTRE/AXE/PLAN	NOMBRE ASSOCIÉ AUX TYPES
- Les symétries centrales	Centre du cube.	1
- Les symétries bilatérales	Plan passant par deux arêtes opposées.	6
- Les symétries bilatérales	Plan médiateur à deux faces opposées.	3
- Les antirotations liées aux axes d'ordre 4 ($\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$)	Droite joignant le centre de deux faces opposées.	3 $ar_{1/4}$ et 3 $ar_{3/4}$
- Les antirotations liées aux axes d'ordre 3 ($\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$)	Droite joignant deux sommets opposés	4 $ar_{1/3}$ et 4 $ar_{2/3}$
		$\Rightarrow$ 24 retournements

[2] Pour plus d'informations, consultez le document "Automorphismes de solides" sur notre site.

Quelques illustrations:

Image des sommets d'un cube par la rotation d' $\frac{1}{4}$ de tour d’axe b



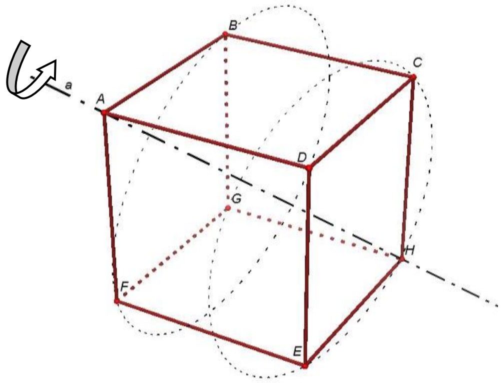
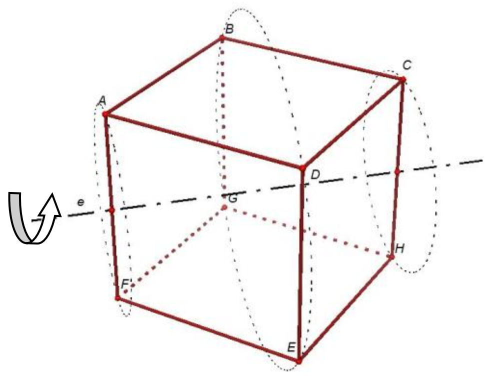


Image des sommets d'un cube par la rotation d' $\frac{1}{3}$ de tour d’axe a

Image des sommets d'un cube par la rotation d' $\frac{1}{2}$ de tour d’axe e



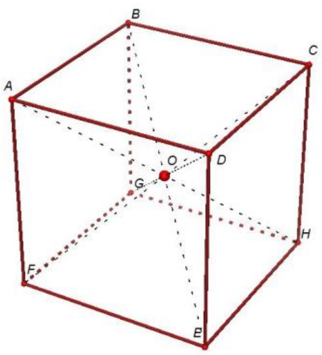


Image des sommets d'un cube par la symétrie de centre O

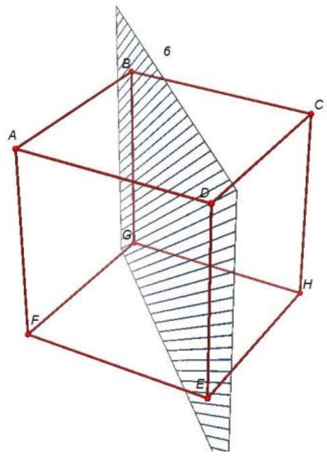
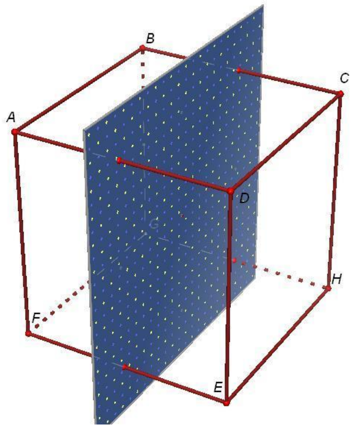


Image des sommets d'un cube par la symétrie bilatérale de plan "6"

Image des sommets d'un cube par la symétrie bilatérale de plan "1"



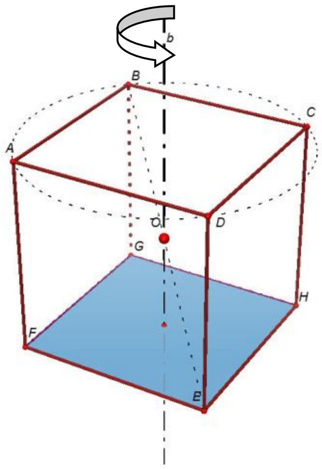
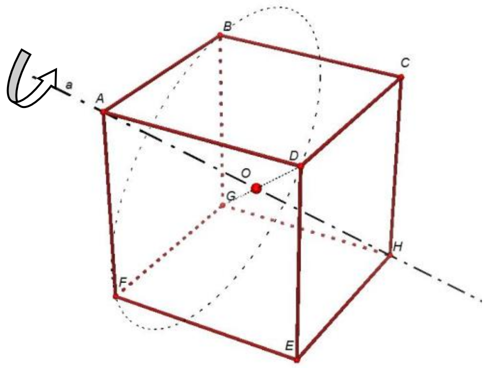


Image des sommets d'un cube par l'antirotation d' $\frac{1}{4}$ de tour d'axe b

Image des sommets d'un cube par l'antirotation d' $\frac{1}{3}$ de tour d'axe a



Remarque: Une antirotation d'angle 180° correspond à une symétrie bilatérale dont le plan est perpendiculaire à l'axe de la rotation et passe par le centre de la symétrie centrale.

		3 axes d'ordre 4	4 axes d'ordre 3	6 axes d'ordre 2	Total
Auto$^+$	**1_E**	**$r_{1/4}$ $r_{2/4}$ $r_{3/4}$**	**$r_{1/3}$ $r_{2/3}$**	**$r_{1/2}$**	
	1	3 3 3	4 4	6	24
Auto$^-$	**S_C**	**$ar_{1/4}$ S_α $ar_{3/4}$**	**$ar_{1/3}$ $ar_{2/3}$**	**S_β**	
	1	3 3 3	4 4	6	24
Auto (C)					**48**

Axe d'ordre 4 = axe passant par le milieu de deux faces opposées

Axe d'ordre 3 = axe passant par deux sommets opposés

Axe d'ordre 2 = axe passant par le milieu de deux arêtes opposées

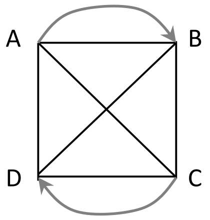
α = plans médiaux

β = plans diagonaux

3. Automorphismes et démonstrations de propriétés de figures géométriques

Comme précisé dans les socles de compétences, il est demandé de comparer "*les propriétés des familles de figures, de les relier à celles des transformations pour arriver à enchainer des énoncés et apprendre progressivement à démontrer*".

Ainsi, les diagonales [AC] et [BD] du carré ABCD sont de même longueur, car la rotation de centre O et d'amplitude de 90° applique la diagonale [AC] sur [BD] et conserve les distances.



De plus, de $r_{O,-90°}([AC]) = [BD]$, il résulte aussi que les diagonales sont perpendiculaires, car l'image d'une droite par une rotation de 90° est une droite perpendiculaire.

Ajoutons en plus que cette même rotation de 90° démontre l'isométrie et la perpendicularité des médianes d'un carré.

4. Avantages de la Géométrie des Transformations

Outre les intérêts explicités ci-dessus pour comprendre des phénomènes scientifiques actuels, la Géométrie des Transformations possède en plus les avantages suivants pour l'appropriation des principes qui régissent toute démarche scientifique:

- La matérialisation des transformations et des premières démonstrations permet, en donnant du sens, de familiariser, dès le début, les élèves à une activité géométrique "complète", c'est-à-dire: observer – manipuler – comparer – dessiner – construire – imaginer – dégager des régularités (des symétries) – établir des analogies – associer des transformations et des figures – émettre des propositions (conjecturer) – les mettre en doute – les démontrer et/ou les réfuter (contre-exemple) – vérifier des hypothèses. De plus, la matérialisation des activités permet une appropriation d'images mentales des transformations et des "démonstrations".

- Outre ces caractéristiques, les démonstrations des propriétés des figures, en Géométrie des Transformations, s'articulent, très souvent, selon le même procédé c'est-à-dire:
  - on détermine les symétries au sens large (les automorphismes) des objets géométriques;
  - on utilise les propriétés de ces automorphismes (ces symétries au sens large) pour justifier les propriétés propres à ces objets géométriques.

- Les transformations agissent aussi globalement au sens où une même transformation permet généralement de démontrer en une fois plusieurs propriétés. À titre d'exemple, les propriétés de l'isométrie des angles et des côtés ainsi que la propriété de l'intersection des diagonales (médianes) en leur milieu d'un parallélogramme quelconque se démontrent en utilisant UNIQUEMENT les notions conservées par la rotation de 180° qui superpose ce parallélogramme à lui-même.

II. COMMENT?

1. Méthodologie adoptée à la Cellule de Géométrie

Les méthodes et les moyens méthodologiques adoptés par la Cellule de Géométrie sont celles qui résultent de l'application intégrale**:**

- des principes de l'enseignement en spirale proposés par l'américain J.-C. BRUNER dans les années soixante;
- des règles de l'enseignement génétique proposées par l'allemand E. WITTMANN dans les années quatre-vingt;

et de l'intérêt de confronter les élèves à des situations problèmes pures pour leur formation scientifique.

2. Les principes de l'enseignement en spirale selon J.-C .BRUNER

Les principes que tout curriculum scolaire doit, selon BRUNER, respecter sont les suivants:

Principe 1 – "*Les matières ('et les savoir-faire') que nous décidons d'enseigner doivent être d'un intérêt permanent pour tous les élèves au cours de toute leur formation et ce qui est important doit apparaître le plus tôt et le plus souvent possible.*"

Principe 2 – "*Les principaux sujets méritent d'être étudiés plusieurs fois, chaque nouvelle présentation incluant à la fois de nouvelles approches et un plus haut degré de sophistication.*"

Principe 3 – "*L'étude doit débuter à un niveau de base où les concepts sont manipulés par l'élève même s'il n'en perçoit pas immédiatement la portée finale. Néanmoins, l'élève ne doit être amené à continuer à exercer ses capacités mathématiques à un niveau de base que si, par la suite, il est capable de progresser à un niveau supérieur, ce qui signifie qu'il soit capable de réfléchir sur ses capacités de base.*"

Si les deux derniers principes sont généralement appliqués dans l'enseignement, le premier semble régulièrement "oublié" en géométrie, et ce même par ceux qui prétendent pratiquer l'enseignement en spirale. Pourtant, c'est ce premier principe qui suggère l'idée de cohérence, de continuité de matière et de même mode de pensée sur toute la scolarité.

3. Les règles de l'enseignement génétique

Le troisième principe de l'enseignement en spirale montre l'importance "de partir du terrain" des élèves. Ce respect du niveau de connaissances et des capacités intellectuelles des enfants, nous nous sommes efforcés de le rencontrer en intégrant les principes de l'enseignement en spirale à ceux de l'enseignement génétique.

La théorie de la "méthode génétique" fut développée et co-fondée par F. KLEIN, O. TOEPLITZ, H. FREUDENTHAL, A. KRYGOWSKA, A. WITTENBERG, M. WAGENSCHEIN, J. PIAGET, J. BRUNER ainsi que D. et P-M. VAN HIELE.

La caractéristique essentielle pour tous ces auteurs est que seul le processus de mathématisation, et non le produit fini, permet de comprendre et d'**apprendre** correctement les mathématiques.

Cette méthode a notamment été diffusée par E. WITTMANN. Pour lui, "*enseigner les mathématiques, c'est faire des mathématiques avec les élèves dans le but de cultiver, d'enrichir leur compréhension de la réalité; dans cette approche des mathématiques, l'accent est mis à la fois sur les composantes du développement de l'apprenant et sur celles du développement de la matière.*"

Pour atteindre ces objectifs, il considère que la "méthode génétique" doit avoir les caractéristiques suivantes:

- *il faut se référer aux connaissances préalables des personnes concernées;*
- *il faut intégrer des raisonnements dans des contextes de problèmes globaux* ***au sein*** *et en dehors des mathématiques;*
- *il faut arriver à des* ***raisonnements rigoureux*** *à partir d'éléments intuitifs et heuristiques;*
- *il faut arriver à une motivation constante et à une* ***continuité permanente****.*

Dès lors, pour lui, la réussite de cette méthode dans l'enseignement suppose:

- *de constituer un tout cohérent;*
- *de couvrir une liste de notions de base avec une bonne maîtrise du savoir-faire;*
- *d'inclure des* ***démonstrations*** *abordables par les élèves et les professeurs;*
- *que l'enseignement puisse se faire dans le temps imparti;*
- *que l'effort exigé du professeur ne soit pas augmenté.*

Pour E. WITTMANN d'ailleurs, une initiation **complète** à la pensée mathématique (en géométrie) par la méthode génétique doit, dès l'école primaire, non seulement se concevoir sur base de problèmes utilitaires ("en dehors des mathématiques"), mais également sur base de problèmes pris au "**sein**" de la mathématique incluant des **raisonnements rigoureux** et des **démonstrations** adaptées au niveau des enfants.

4. Les situations problèmes utilitaires et les situations problèmes pures

La méthodologie actuellement prônée, par certains, pour l'initiation aux mathématiques est essentiellement celle des situations problèmes **utilitaires**. De plus, ces situations problèmes présentées aux élèves sont des situations qui ne demandent généralement pas d'utiliser des concepts théoriques rencontrés précédemment ni d'argumenter les observations. Cette approche des mathématiques, aussi enrichissante et indispensable qu'elle soit, pourrait laisser croire aux élèves:

- qu'ils sont capables seuls de résoudre les problèmes sans utiliser les notions rencontrées auparavant;
- qu'il n'est pas indispensable de stocker en mémoire les concepts déjà rencontrés alors que la mémoire est un des moteurs de tout travail intellectuel;
- qu'il n'existe pas de liens entre les concepts puisqu'ils ne sont pour ainsi dire jamais transférés d'une situation à l'autre.

De ce fait, les élèves n'ont qu'une vision ponctuelle et fragmentaire de l'activité mathématique puisque l'accent n'est mis que sur l'observation, la manipulation, la construction, le dessin, la description.

Or, comme le précise B. CHARLOT: "*il ne faudrait pas considérer* ***uniquement*** *les mathématiques et la pensée mathématique comme une boîte à outils pour résoudre des problèmes de la vie quotidienne*". Il ajoute même: "*qu'il est très difficile de travailler à partir du concret et de l'utile, de sorte que l'on propose souvent aux élèves du pseudo-concret, du pseudo-utile qui les embrouillent et les détournent davantage encore de l'activité mathématique*". Il continue en affirmant qu'il croit *"qu'une démarche de construction du concept mathématique doit s'appuyer sur un problème intéressant en* ***tant que tel*** *et non sur un besoin utilitaire d'une solution au problème posé*".

Cette dernière approche de la mathématique est qualifiée d'approche par les situations problèmes pures par opposition aux situations problèmes utilitaires. Nous l'avons également mise en pratique pour débuter la plupart des nouveaux thèmes. Cette méthode, non seulement est très bien acceptée par les enfants, mais facilite la découverte d'autres concepts apparentés, ce qui permet de mettre en évidence les liens les unissant et d'habituer les élèves à la notion de "théorie déductive". Nous ne réfutons pas les situations problèmes utilitaires, car celles-ci permettent d'approfondir et d'affiner le sens des concepts mathématiques rencontrés. Toutefois, nous sommes convaincus qu'il est souhaitable, au primaire et au secondaire inférieur, d'aborder en premier lieu les concepts géométriques dans le cadre de situations problèmes pures avant de les rencontrer dans des situations problèmes utilitaires si on veut que les élèves prennent conscience de l'enchaînement des matières, de la continuité des méthodes et de la nécessité de maîtriser les concepts vus antérieurement.

De plus, nous sommes de plus en plus convaincus qu'aborder la géométrie UNIQUEMENT par les situations problèmes utilitaires renforce les inégalités d'accès aux concepts et au "jeu" mathématique car seuls les élèves "subtils" sont capables d'utiliser, de s'approprier et de retenir, à travers les résultats utilitaires, les concepts géométriques sous-jacents.

L'approche inverse montre que les moins "perspicaces" ou ceux qui ont des difficultés de passage à la phase d'abstraction accèdent aux solutions utilitaires en utilisant à bon escient les concepts abordés auparavant.

5. Caractéristiques essentielles du cours de géométrie proposé par la Cellule de Géométrie

Sur base des procédés pédagogiques adoptés, les caractéristiques essentielles du cours proposé par la Cellule de Géométrie peuvent se résumer en quelques mots par **cohérence**, **progressivité**, **structuration**, **continuité** et **régularité**.

Cohérence: au sens où les élèves sont *plongés* dans le même cadre théorique de 5 à 18 ans;

Progressivité: au sens où le cours proposé a été élaboré en respectant les principes et règles de l'enseignement en spirale et génétique;

Structuration: au sens où l'ordre de succession des thèmes abordés est tel que les notions nécessaires à la compréhension et à la maîtrise des concepts rencontrés dans ces thèmes ont été analysées antérieurement.

Continuité: au sens où il n'y a pas de trou, d'oubli de matière. Selon le niveau de connaissance visé, tous les concepts indispensables à une véritable compréhension sont rencontrés.

Régularité: au sens où, semaine après semaine et année après année, les matières sont travaillées.

En résumé, l'originalité du cours de Géométrie des Transformations du plan et de l'espace que nous proposons peut se résumer comme suit:

- il se compose de 4 spirales-génétiques entrelacées:
    1. une pour les figures et solides géométriques;
    2. une pour les transformations;
    3. une pour les premiers éléments et premières règles de logique;
    4. une pour la démarche scientifique jusqu'à et y compris la notion de preuve;
- il sensibilise les élèves, dès le début de l'Enseignement Fondamental, à la démarche scientifique y compris l'argumentation ("prémisses[3] des démonstrations") via, dans un premier temps, les démonstrations informelles et collectives;
- il s'appuie sur des situations-problèmes pures;
- il introduit des concepts théoriques non encore habituels dès le début de l'Enseignement Obligatoire; en particulier, le concept d'automorphisme pour découvrir et/ou démontrer les propriétés des figures et des objets géométriques.

Les autres concepts principaux "non traditionnels" développés également de manière non habituelle dans les activités de Géométrie des Transformations sont les suivants:

- les notions de déplacements et de retournements du plan avant de les caractériser en termes de symétries orthogonales, de translations, de rotations, de symétries centrales, de symétries glissées;
- les notions de déplacements et de retournements de l'espace avant de les caractériser en termes de symétries bilatérales, de symétries bilatérales glissées, de symétries centrales, d'antirotations, de rotations, de symétries orthogonales, de translations et de vissages;
- les notions conservées par les déplacements et les retournements du plan dans l'étude des figures géométriques;
- les notions conservées par les déplacements et les retournements de l'espace dans l'étude des objets géométriques;
- l'orientation du plan (à l'aide des cercles horlogiques et antihorlogiques et des dessins de mains sur transparents) pour "définir" les déplacements, les retournements, les similitudes directes et inverses du plan;
- l'orientation de l'espace (à l'aide de la main gauche et de la main droite) pour "définir" les déplacements, les retournements, les similitudes directes et inverses de l'espace;

[3] Il s'agit de démonstrations informelles orales et collectives.

- la notion d'objets non orientés et d'objets orientés (les formes gauche et droite d'un objet – la chiralité des chimistes);
- les homothéties et les similitudes de l'espace;
- les polyèdres convexes à faces régulières avec les classements:
  - en fonction de l'homogénéité des faces et de l'homogénéité des sommets;
  - en fonction de la transitivité des faces et de la transitivité des sommets (les polyèdres réguliers et les polyèdres semi réguliers);
- les isométries du plan ou de l'espace définies en termes de permutations qui conservent les distances et non plus en termes de composées paires ou impaires de symétries orthogonales ou bilatérales;
- les déplacements et les retournements du plan ou de l'espace définis à partir de la conservation ou non des orientations.

6. À propos des premiers éléments, des premières règles de logique et de la notion de démarche scientifique

"Dans l'édifice de la pensée, notamment en mathématique, la logique établit parallèlement les bases du raisonnement (scientifique) et les outils pour faire progresser la connaissance."

Guanbruno GUERRERIO[4]

Si l'expression orale, la lecture, l'écriture et le calcul sont des bases "premières" dans l'Enseignement Fondamental, il en est une, tout aussi essentielle et pourtant souvent oubliée à l'école Primaire, c'est le "***raisonnement***". Sans le raisonnement, les actions de "lire, écrire et calculer" n'ont guère d'efficacité, ni de sens dans la perspective d'une formation efficiente et harmonieuse des enfants.

Bien qu'ignorées par un grand nombre de personnes, des expériences telles que celles réalisées par l'Américain ULMER ont montré que ***le raisonnement logique* n'est en aucun cas inné chez l'individu moyen** et qu'une **initiation,** dès le début de la formation, est indispensable pour se l'approprier.

Ces nouvelles exigences ne sont pas sans conséquence:

- d'une part, sur l'ordonnancement de la matière présentée à un niveau déterminé (la matière doit être structurée de manière à ce que les éléments utiles pour justifier (argumenter) soient vus antérieurement);
- d'autre part, sur les premiers éléments et les premières règles de logique classique à rencontrer dès la première année primaire.

Il est bien évident que ces éléments de logique sont "analysés" progressivement et au fur et à mesure des besoins.
Parmi ces éléments et règles de logique, citons:

- la notion de proposition (au sens mathématique);
- les quantificateurs universel et existentiel: "pour tout" ($\forall$) et "il existe" ($\exists$);

[4] Guanbruno GUERRERIO: Docteur en Philosophie. Extrait de l'Histoire de la Logique vue par Kurt GÖDEL (1906-1978) pour la science (Les génies de la science) - Novembre 2004 - n°20

- l'ordre de succession des quantificateurs;
- les conjonctions "et", "ou", (p et q), (p ou q);
- la notion de négation de propositions;
- les négations des quantificateurs ($\forall$, $\exists$) et des conjonctions (et, ou):

  $\rceil$(p ou q) = $\rceil$p et $\rceil$q $\rceil$(p et q) = $\rceil$p ou $\rceil$q $\rceil(\forall) = \exists$ $\rceil(\exists) = \forall$
- la double négation de propositions;
- les notions de causalité ($\Rightarrow$), d'inférence (p $\Rightarrow$q), d'équivalence (p $\Leftrightarrow$ q);
- les procédés de démonstration;
- les notions de définition et de propriété au sens mathématique.

"*Pas de mathématiques sans une certaine technique logique.*"   J.M. SALANSKY

7. Importance des Mathématiques et en particulier de la Géométrie dans la formation des élèves

7.1. Le constat

Il est clair que la formation à l'esprit scientifique des jeunes est une exigence pour le futur et une responsabilité de notre société.

Or, les mathématiques, et en particulier la géométrie, représentent le premier enseignement à caractère scientifique que rencontrent les enfants. Si, dès l'abord, les élèves ont des difficultés en mathématiques, ils risquent d'éprouver une aversion pour l'ensemble des branches scientifiques.

Pourtant, comme l'indiquait déjà le rapport FAST: *"au fur et à mesure de la diffusion des technologies, il deviendra impératif que de larges couches de la population soient familiarisées avec leur utilisation et avec les enjeux de société que soulèvent ces technologies. La maîtrise du changement technique, à savoir l'usage de celui-ci conformément à des objectifs politiques ou éthiques établis démocratiquement, implique une large diffusion d'une culture générale scientifique et technique ainsi que l'acquisition du savoir-faire par le plus grand nombre. Il revient au système d'enseignement d'assurer cette nouvelle formation générale[5]. **'Une alphabétisation technologique'** constituerait un moyen pour maîtriser les risques de marginalisation et de dualisation sociale[6]."*

Les sciences constituent non seulement un outil fondamental pour faire progresser la technologie, mais elles permettent aussi d'inculquer aux individus un esprit de rationalité, une pensée logique, un sens critique de remise en question perpétuelle.

Nous savons que, un des problèmes auquel l'individu sera confronté demain est l'hyper abondance d'informations et la nécessité de pouvoir les sérier, les structurer, les remettre en question.

---

[5] Rapport final FAST, "Actions nationales de recherche en soutien à FAST", 1998, au Service de Programmation de la Politique Scientifique, pg. 126

[6] Rapport final FAST, op. cit., pg. 214

Comme l'exposait I. STENGERS: *"L'enseignement des sciences est trop souvent un enseignement de la soumission, alors que la première valeur de la science, celle qui devrait lui donner un statut culturel majeur, est son rôle d'empêcheur de penser en rond."*

7.2. Importance de la géométrie pour la formation des élèves

Les principales difficultés qu'éprouvent les élèves en mathématiques se rencontrent dans les cours de géométrie. Pourtant, la géométrie est une matière fondamentale pour la formation des individus et c'est aussi la branche des mathématiques qui est la plus accessible aux enfants.

En effet, comme le souligne H. FREUDENTHAL[7]: "*La géométrie, c'est saisir l'espace*".

C'est donc l'activité qui est la plus directement issue des objets de la vie quotidienne puisque nous vivons dans un monde où des formes multiples se manifestent.

La géométrie permet également de s'élever du domaine du concret à l'abstraction. Il est plus facile pour les enfants, de partir de situations réelles (non nécessairement utilitaires) qu'ils vivent et comprennent pour épurer ensuite les concepts, les réduire à leurs éléments essentiels, les formaliser. C'est également une discipline qui sollicite l'ensemble de la personne: représentation dans l'espace, sens de l'orientation, de l'observation, de l'analyse, esprit déductif, esprit critique…

Bien sûr, si la géométrie part du vécu de l'élève, elle ne se cantonne pas à ce vécu, et les recherches en pédagogie des mathématiques montrent d'ailleurs qu'il est souhaitable de partir de situations relativement complexes afin de faire dégager progressivement les concepts sous-jacents: par manipulation, observation, expérimentation, conjecture et démonstration, les enfants arrivent à élaborer progressivement des "théories". Et c'est cette élaboration progressive d'une théorisation (bien plus que le caractère opérationnel des notions géométriques) qui donne, selon nous, toute l'importance à la géométrie dans une formation harmonieuse des enfants. Ils apprennent à sortir du monde réel et perceptible, à émettre des hypothèses, à analyser, à découvrir leurs erreurs, à défendre vis-à-vis des autres leurs points de vue, à remettre en question les acquis précédents.

Il ne s'agit donc plus de présenter une vue statique et sacralisée des mathématiques, science rigoureuse et incontestable, distillant des vérités absolues et accessibles aux seuls esprits rationnels.

La géométrie fait appel à l'ensemble des composantes de la personnalité humaine et tous les enfants, par la mise en commun de leur personnalité et de leur diversité, peuvent y trouver un point d'ancrage.

De plus, l'enseignement de la géométrie que nous proposons vise justement à procéder par tâtonnement et retouches successives, faisant naître des "pourquoi", des remises en cause continuelles, permettant ainsi de distinguer le discours correct du discours incorrect mais logiquement structuré. L'expérience d'ULMER montre que le gain moyen de capacité de raisonnement de ceux qui ont reçu un cours de géométrie comme technique de pensée est quatre fois supérieur à celui des autres.

[7] H. FREUDENTHAL, "Mathématics as an educational task", D. REIDEL, Dordrecht, 1973

Les situations problèmes adoptées et adaptées au niveau des élèves développent la curiosité, l'expérimentation, la mise en doute, les capacités de réflexion et d'analyse, les divers moyens de preuve jusque et y compris l'argumentation logique et rationnelle.

Ces situations problèmes permettent à chacun de s'épanouir, d'acquérir la confiance en soi et le goût de vouloir en connaître toujours davantage.

La grande diversité du matériel mis entre les mains des élèves, la psychomotricité adaptée, le bon enchaînement continu et structuré des "matières" donnent du sens aux notions développées.

III. POURQUOI?

Dans les deux premières parties de l'exposé, nous avons essayé de répondre aux questions "*quelle géométrie synthétique aborder dans l'enseignement obligatoire?*" et "*comment l'enseigner?*". On peut légitimement se demander pourquoi est-il souhaitable d'enseigner cette géométrie et non pas, comme certains le proposent, revenir à la géométrie d'Euclide.

Une réponse relativement simple et laconique est donnée par Jean SIVARDIERE:

"Pour comprendre le Monde, nous en dégageons les régularités et symétries. Les symétries (les automorphismes) traduisent des invariances qui correspondent à des lois physiques."

Dans cette optique, précisons de manière très succincte, pour les quelques exemples cités en page 4, les notions de bases géométriques qui permettent, de comprendre, d'expliciter et/ou de justifier ces phénomènes scientifiques. Concepts géométriques qui justifient largement, selon nous, une approche de la géométrie des transformations du plan et de l'espace dans l'enseignement obligatoire.

- Critère de classement des 7 types de frises:

  L'existence d'exactement 7 types de frises s'explique à partir des différents types de groupes de symétries (automorphismes) qui laissent invariant les frises (qui superposent globalement les frises à elles-mêmes).

- Critère de classement des 17 types de tapisseries (pavages périodiques du plan):

  L'existence d'exactement 17 types de tapisseries s'explique à partir des différents types de groupes de symétries (automorphismes) qui laissent invariant les tapisseries (qui superposent globalement les tapisseries à elles-mêmes).

- Critère du classement scientifique (le classement de Johnson) des polyèdres euclidiens convexes à faces régulières:

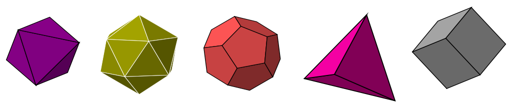
  Les polyèdres convexes à faces régulières sont classés en 3 catégories: les polyèdres réguliers, les polyèdres semi-réguliers et les "autres":

  - **les polyèdres réguliers** sont les polyèdres transitifs en leurs faces et en leurs sommets. Ils correspondent aux cinq polyèdres de Platon.

- **Les polyèdres semi-réguliers** sont les polyèdres transitifs en leurs sommets**.** Ils correspondent aux 13 polyèdres archimédiens ainsi que les deux familles infinies des prismes et des antiprismes.
- Un polyèdre est transitif en ses faces si on peut appliquer toute face sur toute autre face par un automorphisme (une symétrie au sens large) du polyèdre.
- Un polyèdre est transitif en ses sommets si on peut appliquer tout sommet sur tout autre sommet par un automorphisme (une symétrie au sens large) du polyèdre.

Les "autres polyèdres" ne sont pas transitifs en leurs faces ou pas transitifs en leurs sommets.

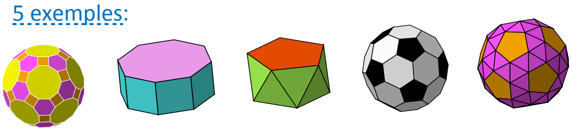
P.E.C.F.R.
transitifs en leurs sommets et en leurs faces
(Il en existe exactement 5)



LES POLYEDRES EUCLIDIENS REGULIERS

P.E.C.F.R.N.I.
transitifs en leurs sommets
(15 types)

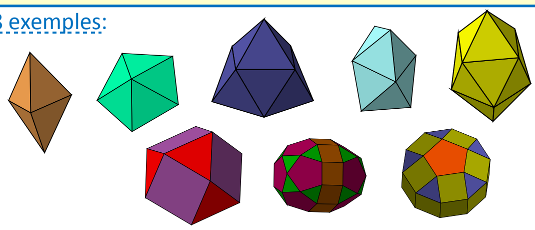
5 exemples:



LES POLYEDRES EUCLIDIENS SEMI-REGULIERS

P.E.C.F.R.
non-transitifs en leurs sommets ou faces
(il en existe exactement 92)

8 exemples:



AUTRES

- Le critère de classement des cristaux:

  Les cristaux sont classés selon les 230 types de groupes de symétries (automorphismes) que les scientifiques ont pu leur associer.

- Idée géométrique utilisée par le Prix Nobel de Médecine Stanley. B. PRUSINER pour comprendre et résoudre le problème de la maladie de la vache folle (la maladie de CREUTZFELDT-JAKOB):

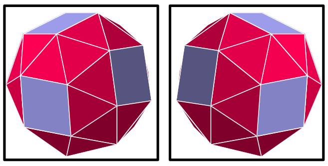
  1. Les objets, les molécules et les polyèdres tels nos deux mains:

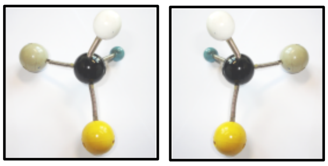
     Semblablement à nos mains qui sont isométriques mais d'orientations différentes (puisque l'une est gauche et l'autre est droite), des objets, des molécules ou des polyèdres parfaitement isométriques peuvent apparaître sous deux formes: une forme dite **"gauche"** et une forme dite **"droite"**. On parle alors des deux formes énantiomères de l'objet, de la molécule ou du polyèdre. Dans ce cas, l'un est l'image de l'autre dans un miroir. Toutefois certains objets, molécules ou polyèdres ne peuvent apparaître sous les formes "gauche" et "droite"; ils sont dits alors non-orientés. À titre d'exemple un cube, la molécule de Carbonne 60, un cylindre sont non-orientés.

On peut montrer que si une molécule admet un automorphisme (une symétrie) du type ***retournement***, alors elle ne possède ni forme "gauche" ni forme "droite", elle est ***achirale***. Il en est de même pour les objets ou les polyèdres. Si une molécule est superposable à elle-même uniquement par un automorphisme du type ***déplacement***, alors, elle est ***chirale*** et peut apparaître sous une forme "gauche" et sous une forme "droite" (les formes "s" et "r"). Il en est de même pour les polyèdres ou les objets.


Main gauche


Main droite


Snub-cube



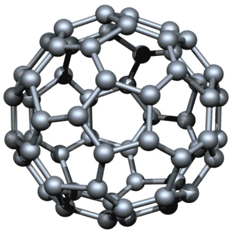
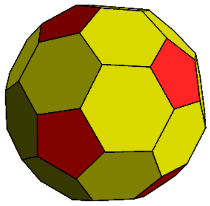
2. C'est à partir de l'idée de "prions orientés" que Stanley. B. Prusiner a pu comprendre le problème de la maladie de la vache folle (la maladie de Creutzfeldt-Jakob). En effet, il a constaté que, dans le cerveau des vaches malades, il y avait des prions d'un type d'orientation alors que, dans le cerveau des vaches saines, les prions étaient de l'autre orientation.

- Polyèdre convexe qui a permis aux Prix Nobel de chimie (1996) Harold Kroto, Robert Curl et Richard Smalley d'imaginer l'existence des fullerènes et en particulier le fameux Carbonne 60:

  C'est à partir de la forme du ballon de football (icosaèdre tronqué) qu'Harold Kroto, Robert Curl et Richard Smalley ont imaginé l'existence des fullerènes et en particulier le fameux Carbonne 60.

  Le ballon de football est formé de 12 pentagones réguliers, de 20 hexagones réguliers, de 60 sommets et de 90 arêtes (60 arêtes communes entre un pentagone et un hexagone et 30 arêtes entre deux hexagones). Il est obtenu, entre autres, par la troncature de l'icosaèdre régulier.

  Le carbone 60 est le premier fullerène découvert. Il est composé semblablement au ballon de football de 12 pentagones réguliers et de 20 hexagones réguliers, chaque sommet (60) correspondant à un atome de carbone et chaque côté à une liaison covalente.

- Quels critères géométriques permettent de distinguer les molécules chirales (les molécules comme nos deux mains) des molécules achirales?

  La chiralité fut découverte, entre autres, par Jean-Baptiste Biot et par Louis Pasteur. Comme vu ci-avant, l'existence d'une forme gauche et d'une forme droite pour une molécule se base sur la non-existence d'une symétrie (automorphisme) du type retournement. Une molécule qui possède un automorphisme du type retournement ne possède pas d'orientation particulière (elle n'est ni gauche ni droite). Elle est dite achirale.

- Quelle idée géométrique a permis de comprendre les problèmes de malformations, dans les années 1960, des bébés dits "bébés SOFTENON" (Thalidomide)?

  Lorsque une molécule est orientée (chirale), elle peut exister sous la forme "gauche" et la forme "droite". Ces deux formes sont parfaitement isométriques mais d'orientations différentes. De plus, elles ont exactement les mêmes propriétés physiques et chimiques mais peuvent réagir différemment sur les organismes vivants.

  Souvent, dans la nature, ce type de molécule apparait généralement sous une seule forme. Par contre, lors de l'élaboration synthétique (industrielle) de ce type de molécule, elle apparait sous les deux formes (la forme droite et la forme gauche). Une des deux formes peut parfois provoquer sur des organismes vivants des réactions très différentes et même, provoquer des dommages corporels irréversibles chez les humains, les fœtus et /ou les embryons.

  C'est exactement ce qu'il s'est passé pour le médicament le "Thalidomide". Le thalidomide est un médicament utilisé durant les années 1950 et 1960 comme sédatif et anti-nauséeux, notamment chez les femmes enceintes. Lors de sa fabrication synthétique à l'époque, les deux formes de sa molécule chirale étaient présentes dans le médicament. On découvrit par la suite qu'une des deux formes provoquait de très graves malformations sur les embryons humains, d'où la naissance, dans les années 1960, d'enfants mal formés.

- Sur quel principe géométrique (1894) se basent les scientifiques (physiciens et chimiste) pour déterminer les propriétés d'un système? (Principe de Pierre CURIE – Prix Nobel de physique en 1903 en collaboration avec son épouse Marie SKLODOWSKA)

  Principe de Pierre CURIE ou Principe de symétrie:

  "*Lorsque certaines causes produisent certains effets, les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les effets produits. La réciproque n'est pas vraie, c'est-à-dire que les effets produits peuvent être plus symétriques que les causes.*"

  Ici encore, la notion de symétrie au sens large ou d'automorphisme joue un rôle fondamental pour dégager les propriétés des effets (des conséquences).

- Quelle idée géométrique a permis à Brout-Englert et Higgs d'imaginer l'existence du Boson scalaire (François ENGLERT et Peter HIGGS - Prix Nobel de physique 2013)?

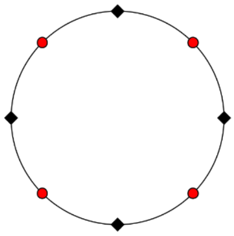
  C'est en se basant, entre autres, sur le principe de "brisure spontanée de symétrie" que BROUT-ENGLERT et HIGGS ont pu imaginer l'existence du Boson scalaire.

  Brisure spontanée de symétrie

  La notion de brisure spontanée de symétrie est liée, comme son nom l'indique, à la notion de symétrie au sens large et au principe de symétrie de Pierre Curie.

  Une approche intuitive de la notion de "brisure spontanée de symétrie" est proposée par Abdus SALAM et est décrit par F. ENGLERT dans le livre "Symétrie et brisure de symétrie".

  "*Des convives attablés autour d'une table ronde ont devant eux une assiette et des couverts mais les verres sont placés symétriquement entre les assiettes. Rien ne favorise l'attribution du verre à un convive plutôt qu'à son voisin. Toutefois, dès qu'un seul convive choisit entre les deux possibilités, le choix des autres convives est fixé. La symétrie gauche-droite du système a été brisée sans que le choix soit fixé par une considération énergétique.*"



Légende:

Verre

Assiette - Convive

  Dans le cas présent, les symétries au sens large ou automorphismes du système sont les rotations de $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$ et $\frac{4}{4}$ de tours ainsi que les 4 symétries orthogonales dont les droites de points fixes passent par deux assiettes "opposées" et par deux verres opposés.

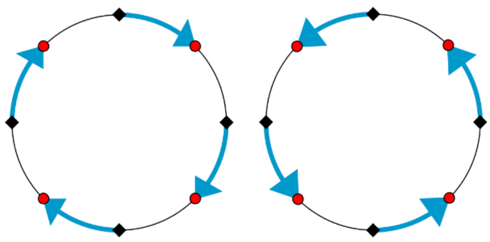
  "*Le plus souvent, la symétrie de l'effet est identique à celle de la cause, et non supérieure; d'autre part le principe n'est valable que dans le cas où la solution est unique ce qui est souvent le cas en mécanique et en électromagnétisme.*"

  Mais le principe de Curie n'est pas applicable dans tous les cas, dès que la solution du problème présente plusieurs solutions; chacune d'elle est (en général) moins symétrique que le problème: on dit qu'elle brise la symétrie. Toutefois, on restaure la symétrie du problème lorsqu'on considère l'ensemble de toutes les solutions que l'on nomme "orbite".

  Le principe de Curie s'applique donc aux orbites de solutions et non aux solutions particulières.

  Dans l'exemple lié au choix des verres les deux solutions possibles pour un convive:

  - *Soit de prendre les verres à sa gauche.*
  - *Soit de prendre les verres à sa droite.*



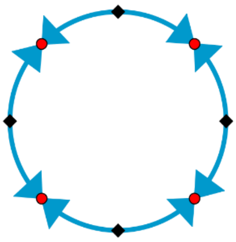
Légende:

Verre

Assiette - Convive

Dans le cas présent et pour chacune des deux solutions, les symétries au sens large ou automorphismes du système, sont uniquement les rotations de $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$ et $\frac{4}{4}$ de tours.

Si on réunit les deux solutions, on récupère les symétries de départ.



Pour espérer que tout citoyen puisse un jour approcher ("comprendre") les prémices des explications de ces questions, il est nécessaire (mais non suffisant) qu'au terme de leur enseignement obligatoire, il se soit familiarisé avec la géométrie des transformations de l'**espace**.

Pour atteindre cet objectif, il est indispensable de les confronter, dès le départ (6 ans), à la Géométrie des Transformations du plan avant d'aborder la géométrie des transformations de l'espace.

De plus, il sera aussi nécessaire de:

- définir les déplacements et les retournements du plan à partir de **l'orientation du plan** (dessin de main gauche et dessin de main droite ou cercle horlogique et cercle antihorlogique) et non plus à partir de composée paire ou impaire de symétries orthogonales;
- définir les déplacements et les retournements de **l'espace** à partir de **l'orientation de l'espace** (main gauche et main droite) et non plus à partir de composée paire ou impaire de symétries bilatérales;
- rechercher les symétries au sens large (les automorphismes) de figures planes (finies ou infinies);
- rechercher les symétries au sens large de solides géométriques et en particulier des polyèdres platoniciens et archimédiens;
- découvrir les divers types de polyèdres euclidiens convexes à faces régulières.

IV. CONCLUSION

Si un des objectifs de l'enseignement obligatoire (5/18 ans) est de permettre à tout élève d'acquérir les bases indispensables pour entreprendre des études supérieures scientifiques de son choix ou comprendre les réalités scientifiques et technologiques qui l'entourent, force est de constater que concernant la Géométrie des Transformations, c'est un échec cuisant!

Bien que cette Géométrie des Transformations soit réclamée:

- dans les socles de compétences pour les 5/14 ans;
- dans le rapport KAHANE sur les mathématiques du 21ième siècle et
- par moult scientifiques de renom,

on est bien obligé de remarquer:

1. que les programmes ignorent la philosophie de la géométrie des transformations et en particulier la notion de symétrie au sens large, clef de voûte de celle-ci ainsi que la notion d'orientation aussi bien du plan que de l'espace;
2. que les manuels scolaires ignorent aussi cette géométrie et la confondent avec l'étude des transformations géométriques pour elles-mêmes. Plus grave, il est triste de constater que, concernant la géométrie, il n'existe aucune cohérence entre le primaire et le début du secondaire inférieur, de même qu'entre le secondaire inférieur et le secondaire supérieur;
3. que les nouvelles compétences terminales qui restent encore sur des activités géométriques dont l'intérêt pour comprendre les évolutions scientifiques actuelles ne sont guère utiles pour ne pas dire obsolètes;
4. l'ignorance des besoins scientifiques actuels par certaines personnes (volontairement ou involontairement) empêche les élèves de se familiariser aux "nouveaux" concepts géométriques.

Pour comprendre l'importance des tous ces concepts, nous ne pouvons que recommander la lecture du livre "*La symétrie en mathématiques, physique et chimie*", Jean SIVARDIERE, Presses Universitaires de Grenoble, 1995.

Mons, le 10 décembre 2013

Pour l'équipe de la Cellule de Géométrie,
Michel DEMAL

Coordinateur de la Cellule de Géométrie de la HEH
Chef de travaux en mathématique à la HEH
Chargé d'enseignement à l'UMons

GSM: 0476/254.320
EMAIL: demal.michel@skynet.be