

La Géométrie des Transformations dans l'apprentissage des mathématiques

Evolution de l'étude de la "famille des carrés"

Avant propos

La géométrie où les transformations sont des outils pour découvrir et/ou justifier les propriétés des objets géométriques s'appelle la Géométrie des Transformations.

Cette géométrie qui relie les transformations à l'étude des objets géométriques est soulignée dans les Socles de Compétences.

Le cours a été élaboré avec la collaboration de nombreux **enseignants de terrain** du Primaire et des deux premières années du Secondaire.

L'étude de la famille des quadrilatères se fait en deux phases distinctes:

- en classe maternelle et au premier degré de l'école primaire (1^e et 2^e année), l'analyse des quadrilatères se fait figure par figure;

- à partir de la troisième année primaire, les quadrilatères sont groupés "famille par famille".

On dégage alors les propriétés communes à tous les membres d'une même famille.

*Ces notes ne comprennent que l'évolution de l'étude de la "famille des carrés".
Pour les autres familles de quadrilatères convexes (le famille des losanges, la famille des rectangles, la famille des parallélogrammes...), les mêmes démarches sont suivies.*

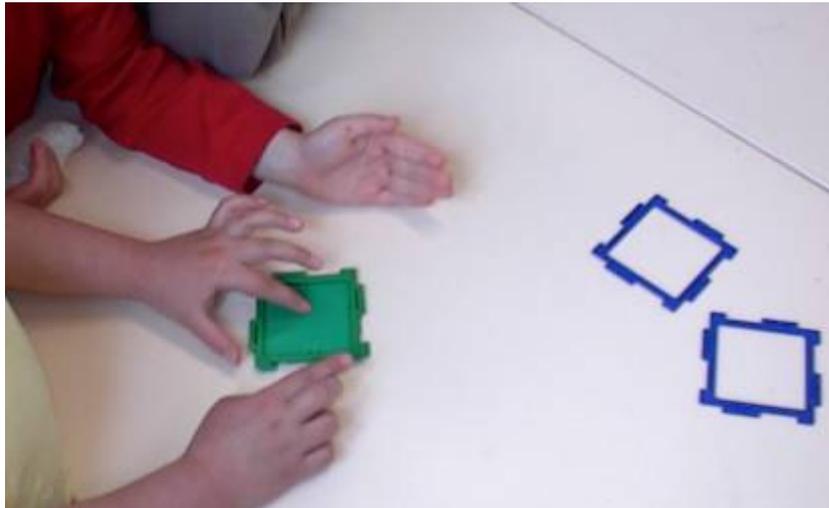
Evolution de l'étude de la "famille des carrés"

En Classe Maternelle (des carrés aux cubes et des cubes aux carrés)

Notion de "carré", au départ du matériel FRAMEWORKS:

- ✓ Comparaison des figures carrées, par la superposition deux à deux.
- ✓ Constatations: elles ont toutes la même forme et la même grandeur; elles sont donc isométriques.

- ✓ Par pivotement de deux carrés de même grandeur, découverte des 4 côtés de même longueur.



- ✓ Par contournement intérieur des faces, découverte de quatre côtés droits et de quatre pointes appelées sommets: 4 sommets.



- ✓ Recherche de carrés dans l'entourage de la classe et sur des solides (ne pas confondre avec des rectangles)



- ✓ Construction, à l'aide de chalumeaux, de carrés de grandeurs différentes (en tenant compte de la longueur des côtés).
- ✓ Surprise: Les carrés en chalumeaux se déforment en losanges.
- ✓ Comment revenir du losange au carré? Le placement d'un angle droit métallique dans un angle des losanges redresse les losanges en carrés.



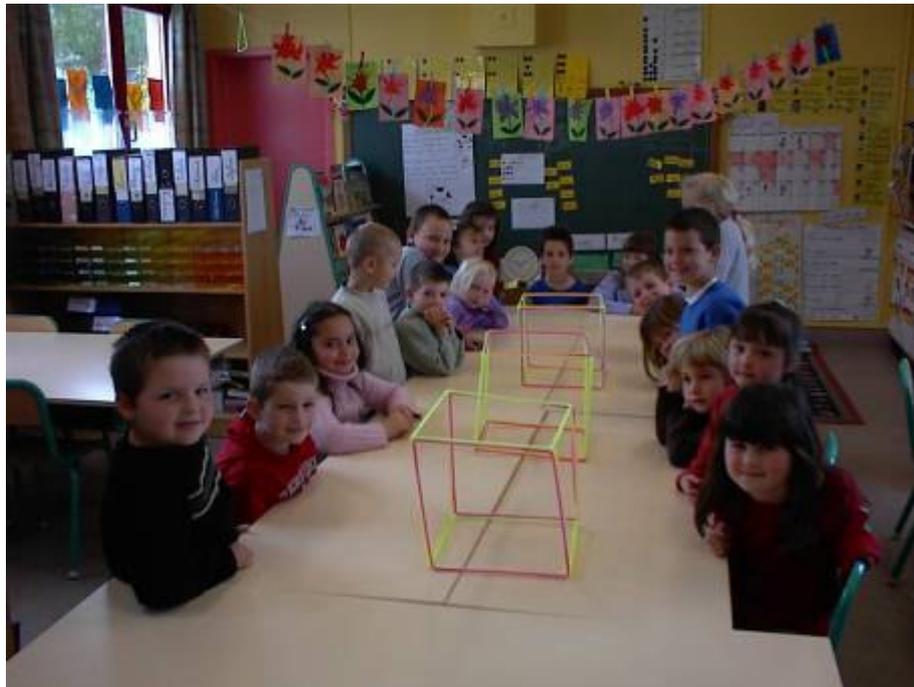
- ✓ Peut-on construire des cubes avec des carrés? Essais en utilisant les plaquettes Polydron et Frameworks.
- ✓ Les plaquettes POLYDRON "pleines" correspondent-elles à des carrés? (La superposition des Polydrons aux Frameworks montre que les deux types de plaquettes sont isométriques.)
- ✓ Construction de cubes avec un mélange de faces carrées pleines ou évidées (attention, les cubes doivent être fermés; ils doivent être constitués nécessairement de leurs six faces !)
- ✓ Combien de plaquettes carrées faut-il pour construire un cube? Comptage: six carrés.
- ✓ Recherche des faces opposées (qui "se regardent face à face"):
 $2 + 2 + 2 = 3 \text{ fois } 2 = 6.$



- ✓ Ouverture des cubes réalisés en plaquettes FRAMEWOKS et obtention de quelques développements différents.



- ✓ Par contournement intérieur des faces des cubes développés, obtention de quelques développements différents sur papier et comparaisons de la place des six faces carrées.
- ✓ Construction de cubes en chalumeaux: rappel du nombre de faces, construction des faces carrées en choisissant toute la longueur des chalumeaux; assemblage des faces ($4 + 2 = 6$).

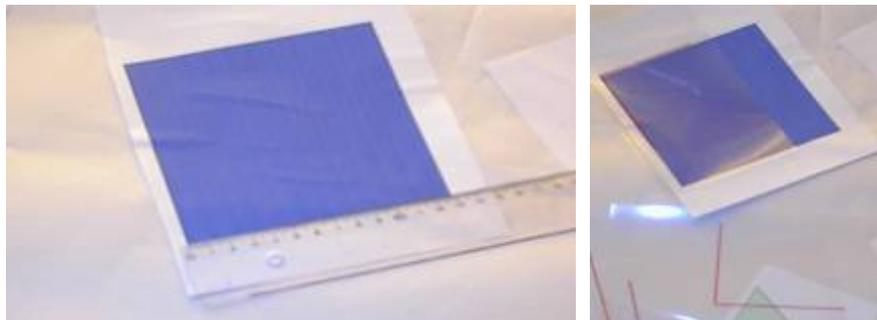


En première année

- ✓ Découverte d'une grande quantité de carrés qui, par superposition à l'aide d'un transparent, montre qu'ils ont la même forme mais pas nécessairement la même grandeur: tous les carrés sont donc semblables.



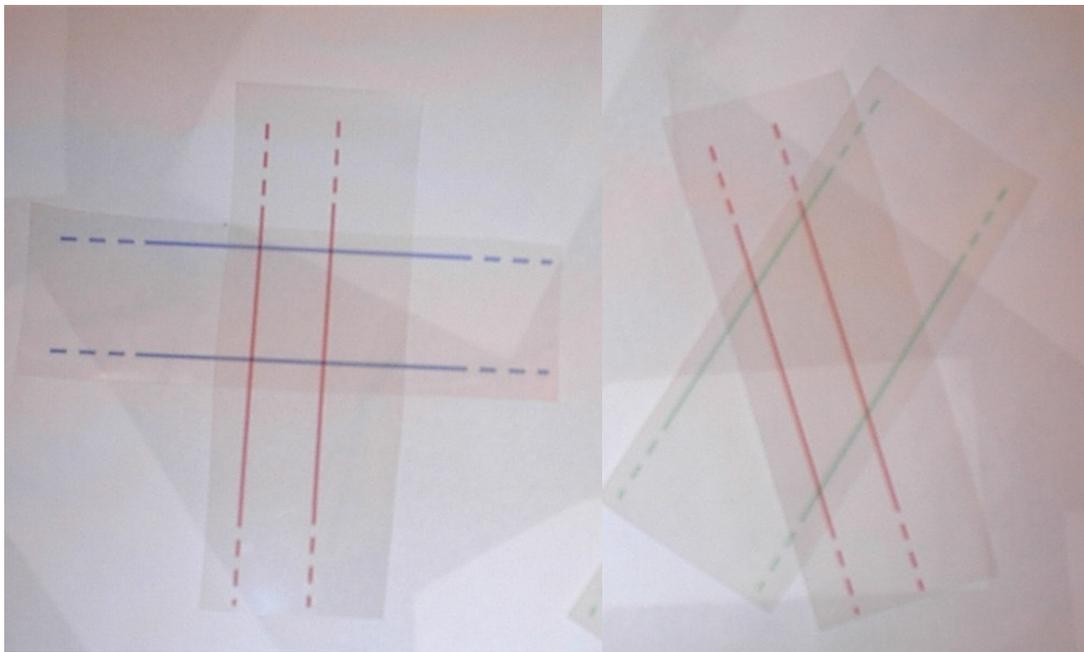
- ✓ Découverte des quatre côtés de même longueur, par mesurage des côtés.
- ✓ Découverte des quatre angles droits, par emboîtement d'angles droits.



- ✓ Découverte du parallélisme des côtés opposés, par le placement de carrés entre deux fils à plomb.



- ✓ Recherche de carrés en croisant des bandes aux bords parallèles; « par erreurs », découverte de quadrilatères autres que des carrés.

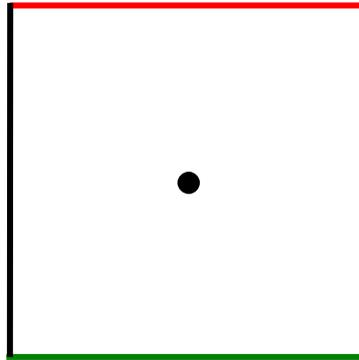


- ✓ Tracer des carrés de grandeurs différentes dans un quadrillage.
- ✓ Recherche de carrés sur des polyèdres.

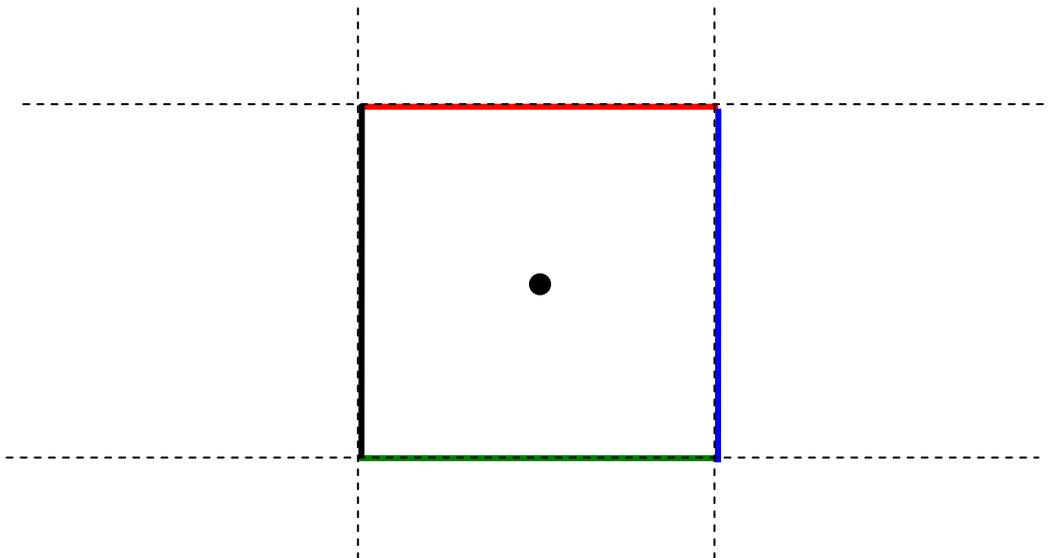
En deuxième année

- ✓ Idem première année
- ✓ En plus:
 - ✓ Vérification de la longueur des côtés par la superposition d'un transparent isométrique et par des mouvements de rotations ou de retournement permettant de "passer" d'un

côté coloré au suivant, au précédent ou à celui se trouvant en face.



- ✓ Vérification du parallélisme des côtés opposés, par le choix et la superposition des bandes transparentes à bords parallèles correspondant à la largeur des côtés.



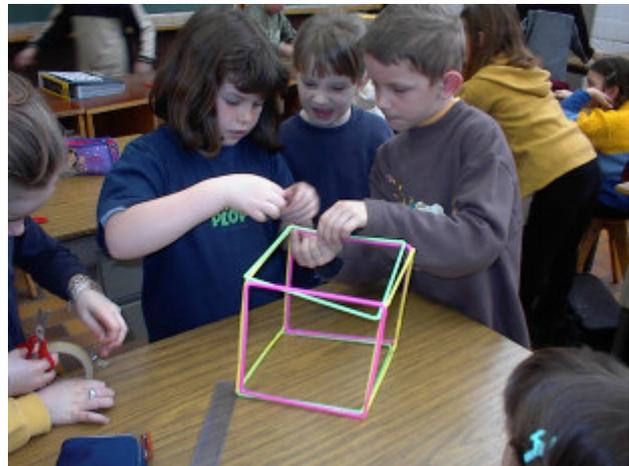
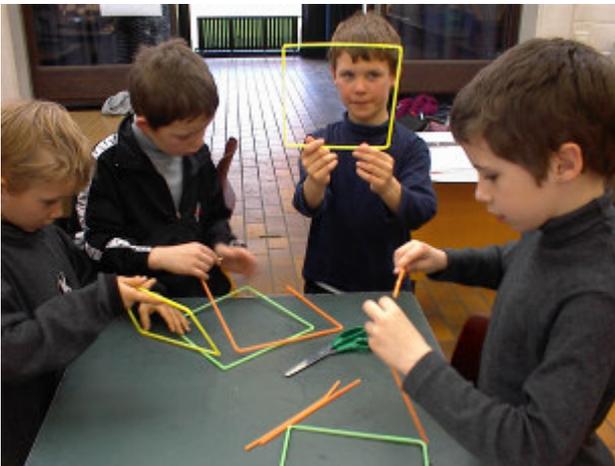
- ✓ Construction de carrés avec des chalumeaux.
- ✓ Constatation: Les carrés en chalumeaux se déforment en losanges.
- ✓ Revenir aux carrés par le placement d'un angle droit métallique dans un angle des losanges.
- ✓ Construction de cubes avec des plaquettes Polydron ou Frameworks.



- ✓ Dénombrement des faces des cubes complets:
 $4 + 2 = 2 + 4 = 3 \times 2 = 2 \times 3 = 6.$

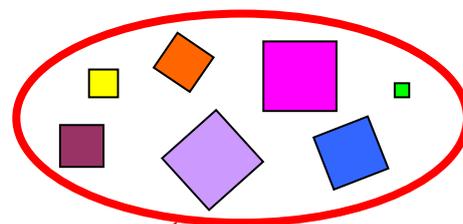


- ✓ Construction de cubes avec des chalumeaux.



En troisième année

- ✓ Sélection des carrés parmi des quadrilatères.
- ✓ Recherche des qualités communes à tous les membres de la famille des carrés:
 - tous les côtés de même longueur,
 - tous les angles de même amplitude,
 - deux paires de côtés parallèles de même écartement.
- ✓ Découverte de la superposabilité de tous les carrés à eux-mêmes par déplacement(s) (du transparent isométrique).
- ✓ Découverte de la superposabilité de tous les carrés à eux-mêmes par retournement(s) (du transparent isométrique).
- ✓ Calcul du périmètre.
- ✓ Recherche de la mesure d'un côté, connaissant le périmètre.
- ✓ Dessin de carrés à l'aide de la latte et de l'équerre Aristo.
- ✓ Recherche de carrés sur des polyèdres.
- ✓ Rappel du positionnement des faces sur un cube.
- ✓ Dénombrement des arêtes sur un cube (plusieurs manières de "voir" ces arêtes).



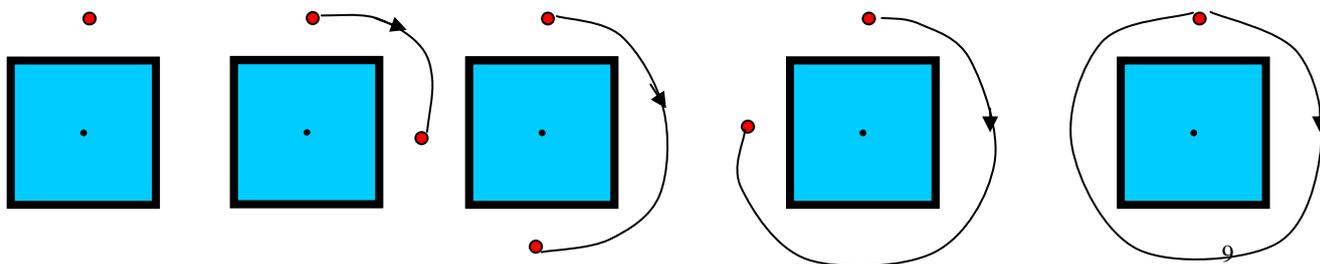
La famille des carrés

En quatrième année

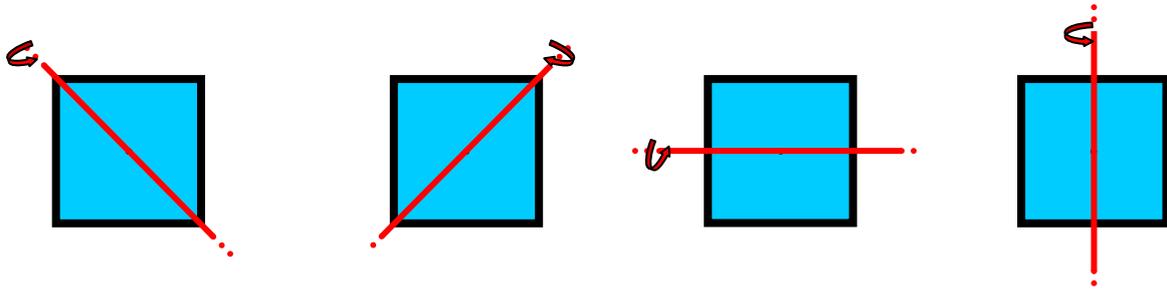
- ✓ idem troisième année
- ✓ En plus:
 - Etablissement de la synthèse des qualités communes:
 - 4 côtés isométriques
 - 2 paires de côtés parallèles de même écartement
 - 4 angles droits

Tous les carrés sont superposables à eux-mêmes:

- par déplacements (4 rotations : $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{4}$)



- par retournements (4 symétries orthogonales: d_1, d_2, m_1, m_2)



Calcul raisonné du nombre de faces d'un cube et du nombre d'arêtes (quand le cube est "démonté" puis quand le cube est "fermé").

En cinquième année

- ✓ idem quatrième année
- ✓ En plus:
 - Recherche des axes de symétrie des carrés par les transformations (symétries orthogonales).



- Synthèse: Les 2 diagonales et les 2 médianes sont les droites de points fixes des 4 symétries orthogonales qui superposent tout carré à lui-même; elles sont donc les 4 axes de symétrie des carrés.



En sixième année

- ✓ idem cinquième année
- ✓ En plus:
 - Recherche des propriétés des médianes et des diagonales, à l'aide des transformations adéquates (rotations de 90° ou 180° ou symétries orthogonales):

Sont-elles de même longueur?
Se coupent-elles en leur milieu?
Sont-elles perpendiculaires?
Sont-elles des axes de symétrie ?

- Vérifications et argumentations.
- Reconnaître le quadrilatère correspondant, en connaissant les caractéristiques de ses diagonales.



- Tracer des quadrilatères, connaissant la longueur et la position de leurs diagonales.
- Calcul du nombre de faces, du nombre d'arêtes – du nombre de sommets d'un cube (découvrir les relations existant entre eux)

En première année du Secondaire

Etant donné les origines scolaires différentes des élèves, cette année est considérée comme une année de "synthèses-rappels" de toute la matière du Primaire. Il s'agit donc d'une mise à niveau générale pour pouvoir atteindre ensuite l'abstraction théorique de la deuxième année.

Classement de la famille des carrés et leurs propriétés y compris les automorphismes ou les éléments de symétrie.

- ✓ Définition
- ✓ Automorphismes ou les éléments de symétrie.
 - centre de rotation d'ordre 4.
 - Axes de symétrie (médiannes et diagonales)
- ✓ Propriétés usuelles
 - parallélisme des côtés
 - propriétés des médianes et des diagonales

En deuxième année du Secondaire

Un pas de plus se fait dans l'abstraction, en recherchant les conditions nécessaires et suffisantes de la famille des carrés, en s'appuyant notamment sur les éléments de symétrie des figures.

- ✓ Définition – rappel
- ✓ Automorphismes ou éléments de symétrie – rappel
 - centre de rotation d'ordre 4.
 - Axes de symétrie (médiannes et diagonales).
- ✓ Recherche des conditions nécessaires et suffisantes correspondant à la famille des carrés.
 - Quadrilatères convexes et centre de rotation d'ordre 4.
 - Quadrilatères convexes et diagonales et médianes axes de symétrie
 - Quadrilatères convexes dont les diagonales sont: perpendiculaires, se coupent en leur milieu, sont de même longueur.
 - Etc...

Pour plus d'informations, voir notre site www.uvgt.net , les plans de matière (année par année), la rédaction (sur CDROM) des activités de géométrie réalisées en classe et en continu, semaine après semaine.

Un CDROM montre:

- **des vidéos des élèves de la "maternelle" et de sixième année primaire au cours d'activités de géométrie des transformations réalisées en classe;**
- **les plans des matières de géométrie en continu de la maternelle à la deuxième année du secondaire;**
- **à titre exemplatif, la rédaction d'une leçon donnée en classe maternelle et la rédaction d'une leçon donnée en quatrième année primaire.**