Journées Nationales de l'APMEP

ORLÉANS

24, 25, 26 et 27 Octobre 2004

Résumé des activités de l'Atelier D11

La détermination et le rôle des "symétries au sens large" ou des "automorphismes" dans l'étude des quadrilatères au Primaire et au début du Secondaire.

Michel DEMAL **Danielle POPELER**

www.uvgt.net

UREM (ULB) – HECFH Mons – GEPEMA (UMH)
Formations en Cours de Carrière
Communauté Française de Belgique

"Sans la science, on ne peut rien comprendre aujourd'hui au monde moderne."
Rien n'est plus important que de donner aux jeunes l'éducation(scientifique) dont ils ont besoin, qui fera d'eux des hommes et des femmes libres, capables de comprendre l'Univers qui les entoure et sa signification."- Georges CHARPAK et Roland OMNES
Extrait de "Soyez savants,devenez prophètes"- éd. Odile JACOB.

Georges CHARPAK est prix NOBEL de physique et physicien au CERN.
Roland OMNES est physicien théoricien et professeur émérite à la Faculté des Sciences de Paris XI -ORSAY.

L'atelier D11 comprend deux parties:
- **Une introduction où les objectifs de la recherche menée en géométrie sont précisés.**
- **L'exposé sur le rôle des quadrilatères de 6 à 14 ans.**

Première partie

Objectifs de la recherche menée en géométrie depuis plusieurs années.

Le cours de géométrie développé en continu ces dernières années s'inscrit dans un projet ambitieux à long terme, celui:

a) de lutter efficacement contre l'échec scolaire en mathématique en établissant une cohérence de théorie et de méthodologie sur tout l'enseignement obligatoire ;

Michel DEMAL 34, avenue Saint Pierre B7000 Mons 065 84 77 86.
Danielle POPELER 6/1 place des Droits de l'Homme B7130 Binche 064 26 79 91.
Site WEB : www.uvgt.net

b) de mettre à la disposition des enseignants tous les documents qui décrivent les activités réalisées (voir les C.D-Rom);
c) de former progressivement et naturellement tous les élèves dès leur plus jeune âge et pendant toute leur scolarité obligatoire:
   - aux premiers éléments et aux premières règles de logique formelle,
   - au raisonnement scientifique,
   - à un cours de géométrie (la Géométrie des Transformations) dans lequel de « nouveaux » concepts géométriques non traditionnels sont intégrés.

Ces « nouveaux » concepts élémentaires sont d'ailleurs nécessaires aujourd'hui pour appréhender des domaines aussi variés que la physique, la chimie, la biologie, la cristallographie, l'architecture...

Parmi ces « nouvelles » notions, le concept de *« **symétrie au sens large** » ou **d'automorphisme*** qui recouvre la notion simple de ***« transformation qui superpose un objet à lui-même tout en conservant sa structure »*** permet de relier les propriétés des objets aux propriétés (invariants) des transformations.

A ce sujet, plusieurs personnalités du monde scientifique attirent l'attention sur l'importance de ce concept:

- « La symétrie est un aspect fascinant de la nature, mais c'est aussi un concept scientifique fondamental qui a envahi les mathématiques, la physique, la chimie et jusqu'à la biologie. Peut-être Paul VALERY y songeait-il quand il écrivait : *« Il n'y a pas de choses simples, mais il y a une manière simple de voir les choses ». »*
  Jean SIVARDIERE

- « La symétrie (scientifique) est fondamentale dans les sciences quelles que soient les disciplines. La symétrie est partout. Elle permet de décrire de manière précise de nombreux systèmes, de clarifier et de simplifier l'étude de leurs propriétés. Des résultats très importants peuvent ainsi être prédits de manière rigoureuse sans que l'on ait à faire appel à des théories mathématiques sophistiquées. »
  Jean SIVARDIERE

- « La symétrie (scientifique) est un outil de notre perception, car elle permet de réduire de manière importante les informations nécessaires à la connaissance globale d'un objet, d'une figure, d'un événement. Pourtant elle n'est pas enfermée dans une spécialité, mais apparaît plutôt comme un concept transversal relevant aussi bien des sciences exactes que des sciences du vivant, voire des disciplines artistiques. »
  Gilles COHEN – TANNOUDJI et Yves SECQUIN

- *« …tant de choses peuvent être connues sur la structure même d'un objet grâce à ses automorphismes (symétries).» - FREUDENTHAL*

- " Les modèles de symétrie sont intrinsèques à tous les aspects de la perception et semblent jouer un rôle essentiel dans les processus créatifs à la fois en sciences et en arts.
  Sans une conscience de l'importance de tels concepts abstraits pour les réponses cathartiques qui étayent l'effort humain, il est douteux que les présentes tentatives désespérées faites en vue d'améliorer la quantité et la qualité des relations (en recherche scientifique et développement ou en arts) ne conduisent à rien d'autre que l'échec". -

Michel DEMAL 34, avenue Saint Pierre B7000 Mons 065 84 77 86.
Danielle POPELER 6/1 place des Droits de l'Homme B7130 Binche 064 26 79 91.
Site WEB : www.uvgt.net

Les autres concepts principaux « non traditionnels » développés également de manière non habituelle dans les activités de Géométrie des Transformations sont les suivants :

- les notions de déplacements et de retournements du plan avant de les caractériser en termes de symétries orthogonales, de translations, de rotations, de symétries centrales, de symétries glissées.
- les notions de déplacements et de retournements de l'espace avant de les caractériser en termes de symétries bilatérales, de symétries bilatérales glissées, de symétries centrales, d'antirotations, de rotations, de symétries orthogonales, de translations et de vissages.
- les notions conservées par les déplacements et les retournements du plan dans l'étude des figures géométriques.
- les notions conservées par les déplacements et les retournements de l'espace dans l'étude des objets géométriques.
- l'orientation du plan (à l'aide des cercles horlogiques et antihorlogiques et des dessins de mains sur transparents) pour « définir » les déplacements, les retournements, les similitudes directes et inverses du plan.
- l'orientation de l'espace (à l'aide de la main gauche et de la main droite) pour « définir » les déplacements, les retournements, les similitudes directes et inverses de l'espace.
- la notion d'objets non orientés et d'objets orientés (les formes gauche et droite d'un objet - la chiralité des chimistes).
- les homothéties et les similitudes de l'espace.
- les polyèdres convexes à faces régulières avec les classements :
  - ✓ en fonction de l'homogénéité des faces et de l'homogénéité des sommets ;
  - ✓ en fonction de la transitivité des faces et de la transitivité des sommets (les polyèdres réguliers et les polyèdres semi réguliers).

Signalons que dans le « Rapport au Ministre de l'Education Nationale Française sur l'Enseignement des Sciences Mathématiques, sous la direction de Jean-Pierre KAHANE (Edition Odile JACOB), ces concepts « non traditionnels » sont signalés, directement ou indirectement, comme étant des concepts fondamentaux à développer actuellement dans l'enseignement de la géométrie (de 5 à 18 ans) .
Il en est de même en Communauté Française de Belgique puisque, dans le document officiel intitulé : « Les Socles de Compétences en Communauté Française de Belgique », à la page 28, il est précisé que : *"…on compare les propriétés des familles de figures, <u>on les relie</u> à celles des transformations. On en arrive ainsi à enchaîner des énoncés et on apprend progressivement à démontrer."*

Cette dernière recommandation signifie clairement qu'il ne suffit plus de découvrir <u>séparément</u> les propriétés des objets géométriques et les propriétés des transformations; encore faut-il les relier entre elles afin de pouvoir enchaîner des énoncés et apprendre progressivement à démontrer.

Michel DEMAL 34, avenue Saint Pierre B7000 Mons 065 84 77 86.
Danielle POPELER 6/1 place des Droits de l'Homme B7130 Binche 064 26 79 91.
Site WEB : www.uvgt.net

La géométrie qui relie les propriétés des transformations aux propriétés des objets géométriques s'appelle "La Géométrie des Transformations" et prend ses origines dans les développements des géométries dites non-euclidiennes et de la théorie des groupes.

Dans cette géométrie, les transformations sont perçues comme des outils qui permettent, grâce à leurs propriétés, de:
- découvrir et/ou démontrer les propriétés des objets géométriques du plan et de l'espace;
- créer des figures ayant des régularités "répétitives" (frises – rosaces – tapisseries);
- classer des objets du plan et de l'espace;
- percevoir si un objet est orienté ou non orienté (paires d'objets énantiomères - formes "gauche" ou "droite" d'un objet - molécules chirales)

Cette géométrie se définit succinctement comme ***" l'étude des objets géométriques du plan et de l'espace par les transformations".***

Deuxième partie

La détermination et le rôle des "symétries au sens large" ou des "automorphismes" dans l'étude des quadrilatères au Primaire et au début du Secondaire

A. Automorphismes

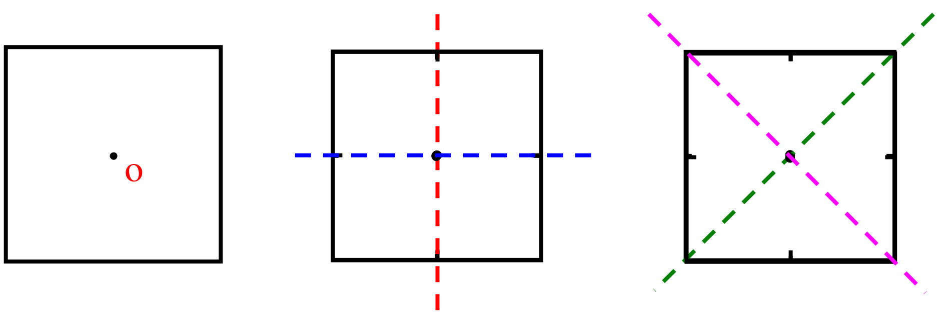
Comme précisé ci-dessus, le Géométrie des Transformations est une géométrie où les propriétés des transformations sont utilisées pour découvrir et/ou démontrer les propriétés des objets géométriques.
Les propriétés des objets géométriques sont reliées aux propriétés des transformations via le concept "symétrie au sens large" ou automorphisme.

A titre d'exemples:

les automorphismes d'un carré se composent de:

- 4 "déplacements" ou 4 auto$^+$: les rotations de 1/4 , 2/4 , 3/4, 4/4 de tour de centre o)
- 4 "retournements" ou 4 auto$^-$: les symétries orthogonales dont les droites de points fixes sont les médianes et les diagonales.

On résume les auto$^+$ en affirmant que le point "o" est un centre de rotation d'ordre 4 et les auto$^-$ en affirmant que les médianes et les diagonales d'un carré sont des axes de symétrie.



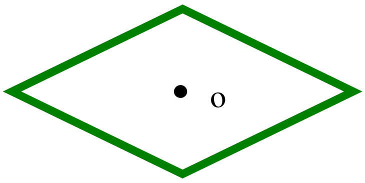
auto (c)
- auto$^+$ ($r_{1/4}$; $r_{2/4}$; $r_{3/4}$; $r_{4/4}$)
- auto$^-$ (s_{m1} ; s_{m2} ; s_{d1} ; s_{d2})

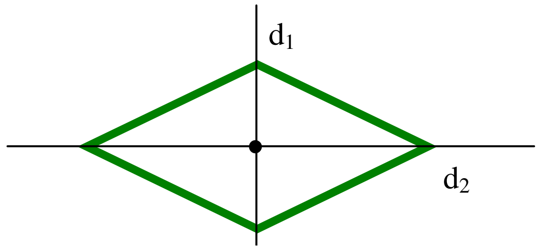
Michel DEMAL 34, avenue Saint Pierre B7000 Mons 065 84 77 86.
Danielle POPELER 6/1 place des Droits de l'Homme B7130 Binche 064 26 79 91.
Site WEB : www.uvgt.net

Les automorphismes d'un losange quelconque se composent de:

- 2 "déplacements" ou 2 auto$^+$: les rotations de ½ et 2/2 tour de centre o)
- 2"retournements" ou 2 auto$^-$: les symétries orthogonales dont les droites de points fixes sont les diagonales.

On résume les auto$^+$ en affirmant que le point "o" est un centre de rotation d'ordre 2 et les auto$^-$ en affirmant que les diagonales d'un losange sont des axes de symétrie.

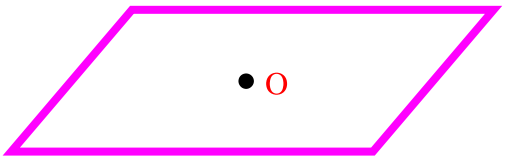




auto (L)
- auto$^+$ ($r_{1/2}$; $r_{2/2}$)
- auto$^-$ (s_{d1} ; s_{d2})

Les automorphismes d'un parallélogramme quelconque se composent de:
2 "déplacements" ou 2 auto$^+$: les rotations de ½ et 2/2 tour de centre o.

On résume les auto$^+$ en affirmant que le point "o" est un centre de rotation d'ordre 2 et qu'il n'existe pas d'auto$^-$.

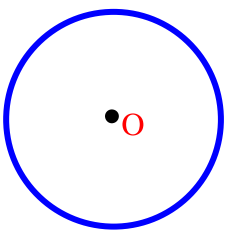


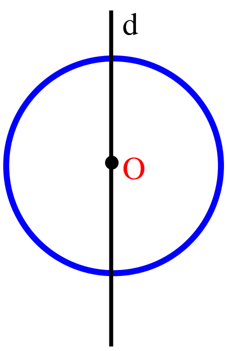
auto (P)
- auto$^+$ ($r_{1/2}$; $r_{2/2}$)
- auto$^-$ (néant)

Les automorphismes d'un disque se composent:

- d'une infinité de "déplacements" ou d'une infinité d'auto$^+$: les rotations $r_{o,â}$ où $O° < â \leq 360°$
- d'une infinité de"retournements" ou d'une infinité d'auto$^-$: les symétries orthogonales dont les droites de points fixes sont les droites diamétrales.

On résume les auto$^+$ en affirmant que le point "o" est un centre de rotation d'ordre infini ou de révolution et les auto$^-$ en affirmant que toutes les droites diamétrales sont axes de symétrie.





auto (D)
- auto$^+$ ($r_{o,â}$ où $O° < â \leq 360°$)
- auto$^-$ (s_d où d est un diamètre)

Michel DEMAL 34, avenue Saint Pierre B7000 Mons 065 84 77 86.
Danielle POPELER 6/1 place des Droits de l'Homme B7130 Binche 064 26 79 91.
Site WEB : www.uvgt.net

<u>Remarque:</u>
Les automorphismes du plan euclidien sont les similitudes planes

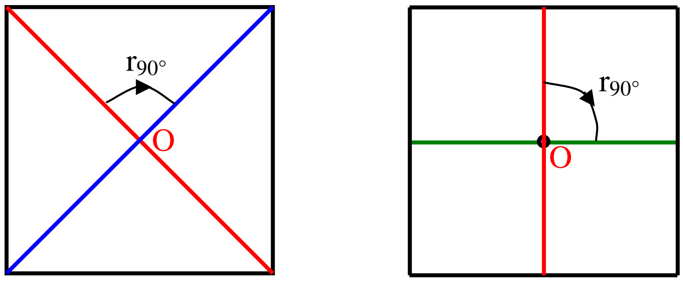
B. Démonstrations de propriétés de figures réalisées via les automorphismes

<u>A titre d'exemples:</u>

<u>Pour le carré:</u>

L'automorphisme (superposition d'une figure à elle-même tout en conservant sa structure)"rotation de 90°" démontre que:

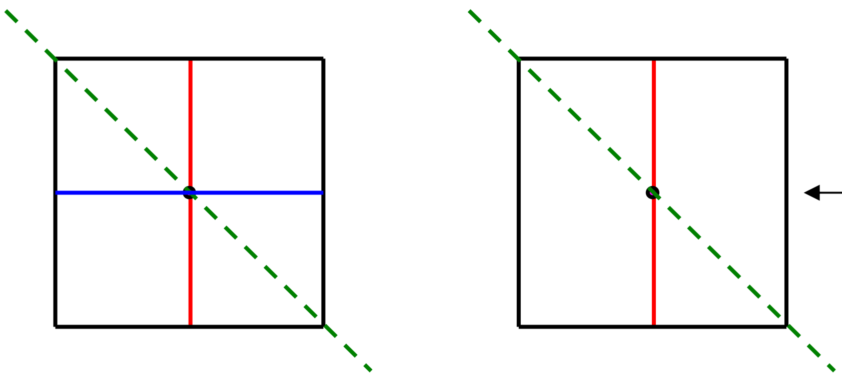
- Les diagonales du carré sont perpendiculaires et de même longueur
- Les médianes du carré sont perpendiculaires et de même longueur



L'automorphisme (superposition d'une figure à elle-même tout en conservant sa structure)"rotation de 180°" démontre que:

- Les diagonales se coupent en leur milieu
- Les médianes se coupent en leur milieu
- Les côtés opposés sont parallèles
- Les médianes et les diagonales sont concourantes

L'automorphisme (superposition d'une figure à elle-même tout en conservant sa structure" symétrie orthogonale dont la droite de points fixes est une diagonale démontre que les médianes sont de même longueur.



"Modèle" sur transparent permettant de montrer la symétrie orthogonale (ou le "passage" de la médiane rouge à la médiane bleue).

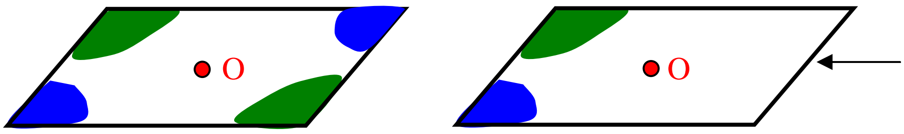
<u>Attention!</u>
Le pliage n'est pas un modèle permettant d'illustrer une symétrie orthogonale plane.

Michel DEMAL 34, avenue Saint Pierre B7000 Mons 065 84 77 86.
Danielle POPELER 6/1 place des Droits de l'Homme B7130 Binche 064 26 79 91.
Site WEB : www.uvgt.net

Les parallélogrammes

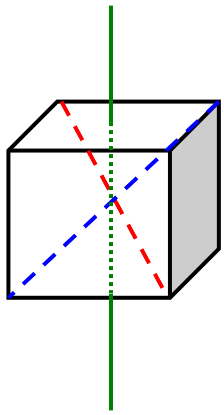
L'automorphisme (superposition d'une figure à elle-même tout en conservant sa structure) "rotation de 180°" démontre que dans les parallélogrammes:

- Les diagonales se coupent en leur milieu
- Les médianes se coupent en leur milieu
- Les côtés opposés sont isométriques
- Les médianes et les diagonales sont concourantes
- Les angles opposés sont de même amplitude



"Modèle" sur transparent permettant de montrer la permutation des angles opposés par la rotation de 180° de centre O.

Les cubes



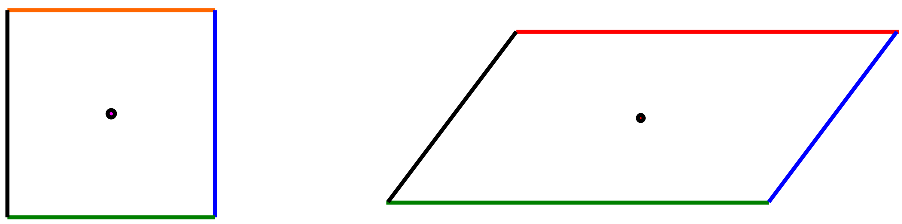
La rotation de 90° d'axe vert démontre que la grande diagonale rouge et la grande diagonale bleue sont isométriques.

C. Automorphisme (symétrie au sens large) et étude des quadrilatères de 6 à 14 ans

L'utilisation de la notion d'automorphisme pour découvrir et/ou "justifier" les premières propriétés liées aux figures géométriques usuelles apparaît à partir de la deuxième année primaire. Cette utilisation fait suite aux activités de première et deuxième année primaire sur la recherche de figures isométriques via les déplacements et/ou les retournements sans les exprimer (en 1e , 2e , 3e année primaire) en termes de symétrie orthogonale, de rotations, de translations, de symétrie centrale et même de symétrie glissée.
Les déplacements, les retournements et les automorphismes des figures se découvrent par l'intermédiaire de "modèles" dessinés sur transparents.

Deuxième année primaire

En deuxième année primaire, découverte de l'isométrie des angles et des côtés dans le carré, le rectangle quelconque, le losange quelconque, le parallélogramme quelconque par les automorphismes des figures exprimés en termes de déplacement et de retournement .



Michel DEMAL 34, avenue Saint Pierre B7000 Mons 065 84 77 86.
Danielle POPELER 6/1 place des Droits de l'Homme B7130 Binche 064 26 79 91.
Site WEB : www.uvgt.net

Troisième année primaire
En troisième année primaire, découverte de la superposabilité des quadrilatères à eux-mêmes en termes de déplacement et/ou de retournement. Les déplacements et les retournements ne sont pas encore exprimés en termes de symétries orthogonales et de rotations. L'isométrie des angles et des côtés dans le carré, le rectangle quelconque, le losange quelconque, le parallélogramme quelconque sont justifiés par les automorphismes des figures exprimés en termes de déplacement et de retournement.

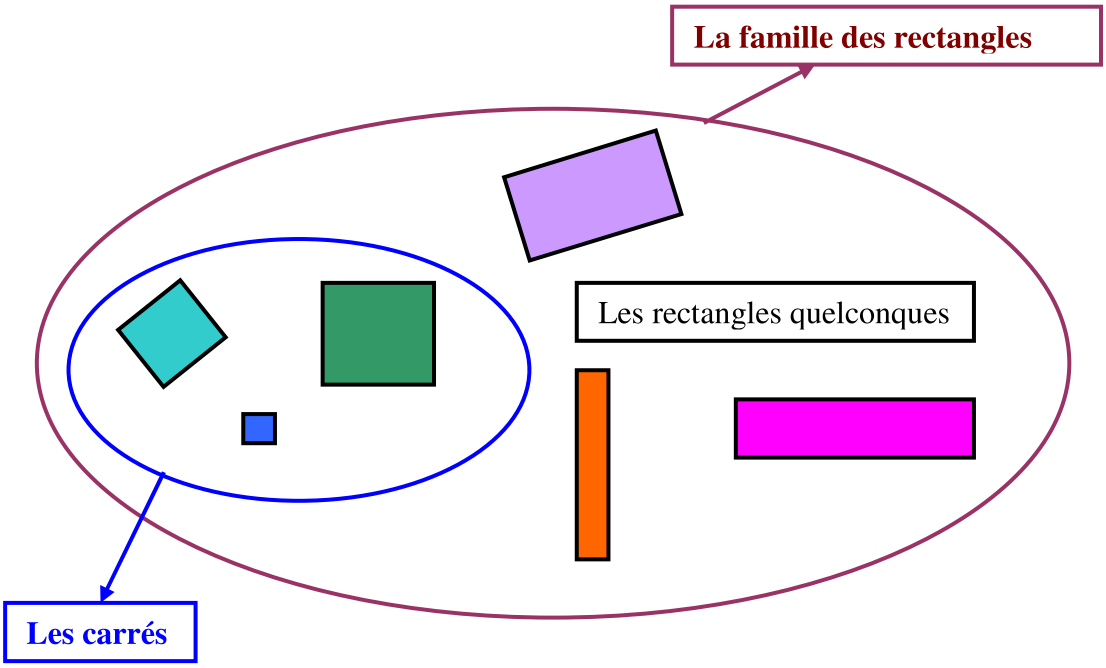
A titre d'exemples:
synthèse de la famille des rectangles

Famille des rectangles

La famille des quadrilatères possédant 4 angles droits.

Il existe 2 sortes de rectangles:

- Les rectangles quelconques
- Les rectangles particuliers: les carrés



Qualités communes à tous les rectangles

- 4 angles droits
- 2 paires de côtés parallèles
- Les côtés opposés de même longueur
- Superposables à eux-mêmes par déplacement et aussi par retournement

Michel DEMAL 34, avenue Saint Pierre B7000 Mons 065 84 77 86.
Danielle POPELER 6/1 place des Droits de l'Homme B7130 Binche 064 26 79 91.
Site WEB : www.uvgt.net

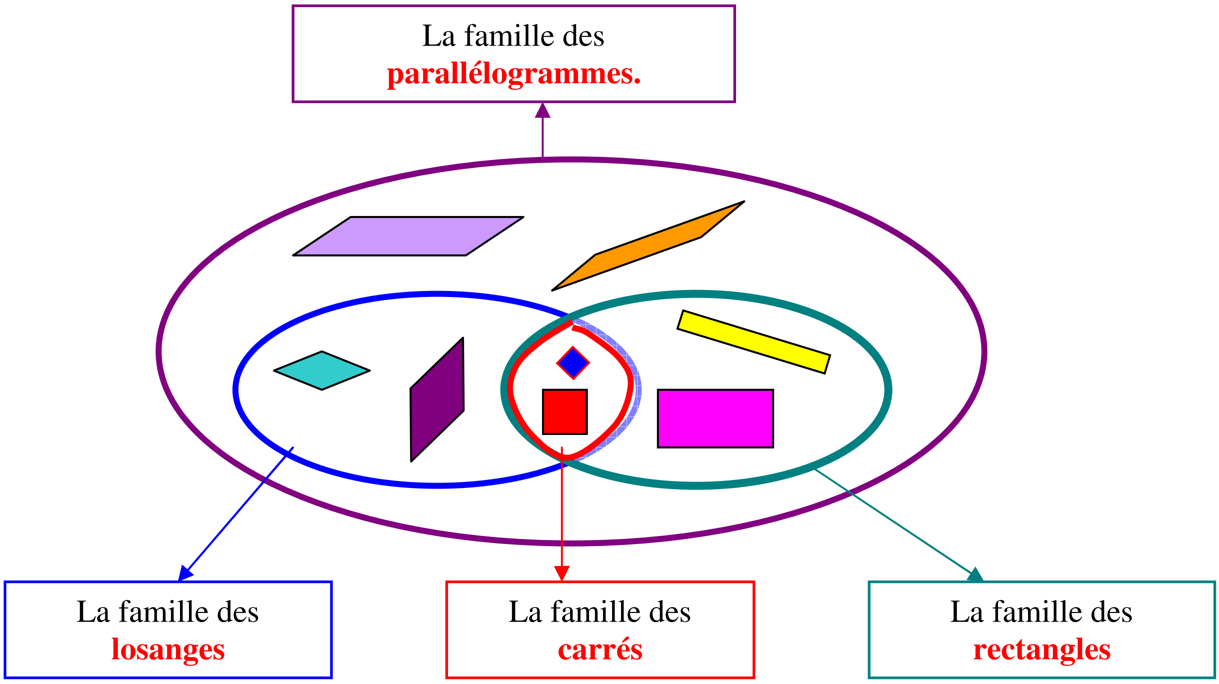
Synthèse de la famille des rectangles

La famille des parallélogrammes

La famille des quadrilatères possédant deux paires de côtés parallèles

Il existe **4** types de parallélogrammes:

- les parallélogrammes quelconques
- les losanges quelconques
- les rectangles quelconques
- les carrés



Qualités communes à la famille des parallélogrammes:

- **2 paires de côtés parallèles**
- **les angles opposés de même amplitude**
- **superposables à eux-mêmes par déplacement**

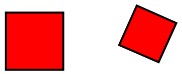
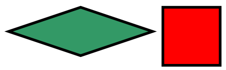
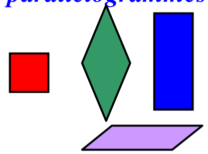
Quatrième année primaire

Première approche des symétries orthogonales – de la notion d'axe de symétrie de figures - de rotations. Expression des automorphismes des quadrilatères en termes de symétries orthogonales et de rotations.

Michel DEMAL 34, avenue Saint Pierre B7000 Mons 065 84 77 86.
Danielle POPELER 6/1 place des Droits de l'Homme B7130 Binche 064 26 79 91.
Site WEB : www.uvgt.net

Les quadrilatères connus en quatrième année - Construction de la synthèse

Quelles sont les propriétés communes à tous les membres d'une même famille ? (Réponds I ou O)

Familles des quadrilatères connus	2 paires de côtés parallèles	4 côtés de même longueur	côtés opposés de même longueur	4 angles droits	Angles opposés de même amplitude	*Superposables à eux-mêmes par déplacements (rotations)*				*Superposables à eux-mêmes par retournements (symétries orthogonales)*			
						r 1/4	r 2/4	r 3/4	r 4/4	S(d_1)	S(d_2)	S(m_1)	S(m_2)
Famille des carrés 													
Famille des rectangles 													
Famille des losanges 													
Famille des *parallélogrammes* 													

Michel DEMAL 34, avenue Saint Pierre B7000 Mons 065 84 77 86.
Danielle POPELER 6/1 place des Droits de l'Homme B7130 Binche 064 26 79 91.
Site WEB : www.uvgt.net

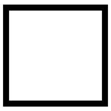
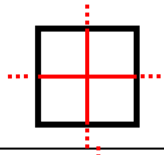
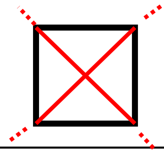
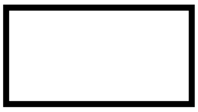
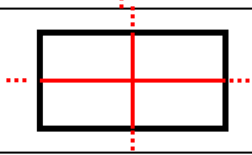
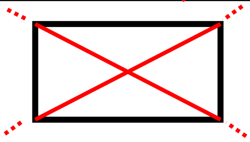
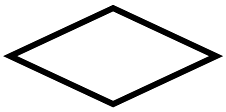
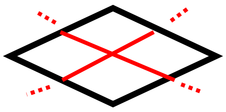
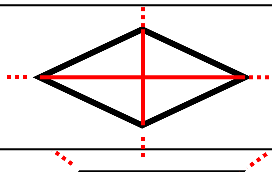
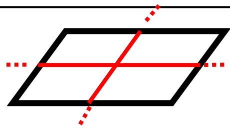
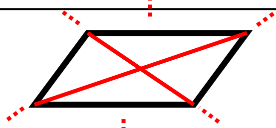
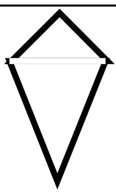
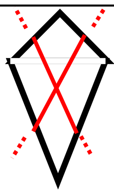
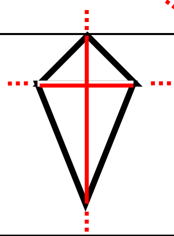
Cinquième année primaire

Renforcement et utilisation des symétries orthogonales et des rotations pour exprimer les automorphismes des quadrilatères.

Détermination des axes de symétrie des quadrilatères.

A titre d'exemple:

> ***Les médianes et les diagonales des quadrilatères suivants sont-elles des axes de symétrie ?***
> ***I (oui) – O (non).***

Quadrilatères	Médianes (m)	Diagonales (d)	m	d
				
				
				
				
				

Sixième année primaire et Première année du Secondaire

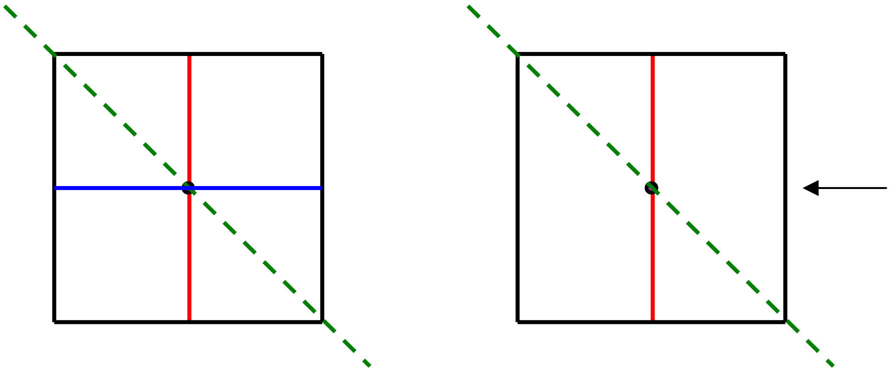
- Démonstrations de propriétés dans les quadrilatères en utilisant les automorphismes des figures (les automorphismes sont modélisés grâce aux "représentations" sur transparents).

- Découverte de l'orbite d'un point d'un carré par les automorphismes du carré.

Michel DEMAL 34, avenue Saint Pierre B7000 Mons 065 84 77 86.
Danielle POPELER 6/1 place des Droits de l'Homme B7130 Binche 064 26 79 91.
Site WEB : www.uvgt.net

A titre d'exemples:

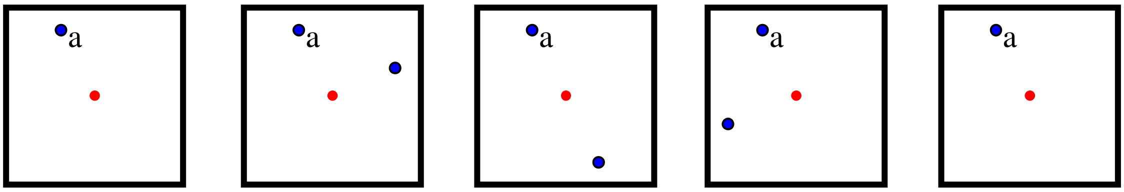
- La démonstration de l'isométrie des médianes de tout carré est illustrée ci-après.



"Modèle" sur transparent permettant de montrer la symétrie orthogonale (ou le "passage" de la médiane rouge à la médiane bleue).

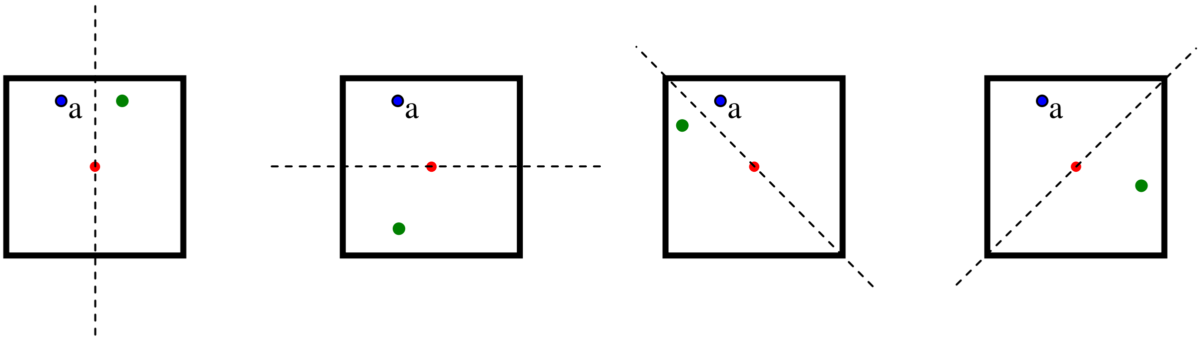
- Recherche de l'orbite d'un point d'un carré

a)A l'aide d'un transparent, recherche de toutes les positions possibles du point a, par les rotations qui superposent le carré à lui-même (voir les points bleus ci-dessous).

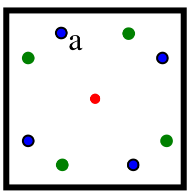


1/4de tour 2/4 de tour 3/4 de tour 4/4 de tour

b)A l'aide d'un transparent, recherche de toutes les positions possibles du point a, par les "symétries orthogonales" qui superposent le carré à lui-même (voir les points verts ci-dessous).



c) Voici toutes les positions possibles du point a après tous les "déplacements" et tous les "retournements" qui superposent le carré à lui-même (voir les points bleus et verts ci-dessous).



Après les 4 rotations et les 4 symétries orthogonales du carré, le point a peut occuper 8 places possibles (c'est l'orbite du point a).

Michel DEMAL 34, avenue Saint Pierre B7000 Mons 065 84 77 86.
Danielle POPELER 6/1 place des Droits de l'Homme B7130 Binche 064 26 79 91.
Site WEB : www.uvgt.net

Deuxième année du Secondaire

Recherche de quadrilatères ayant tel ou tel automorphisme donné

Troisième année et Quatrième année du Secondaire

Découverte de l'orbite d'un point d'une figure par les automorphismes de la figure.
Polygone associé à l'orbite d'un point

Extensions

Nombre d'isométries entre deux figures isométriques
Détermination des automorphismes de l'image d'une figure par une isométrie (notion de "transposée").
Objets orientés – objets non orientés

Michel DEMAL 34, avenue Saint Pierre B7000 Mons 065 84 77 86.
Danielle POPELER 6/1 place des Droits de l'Homme B7130 Binche 064 26 79 91.
Site WEB : www.uvgt.net