# 6. Définitions adoptées dans l'Enseignement Fondamental

## 6.1. Les figures géométriques dans l'Enseignement Fondamental

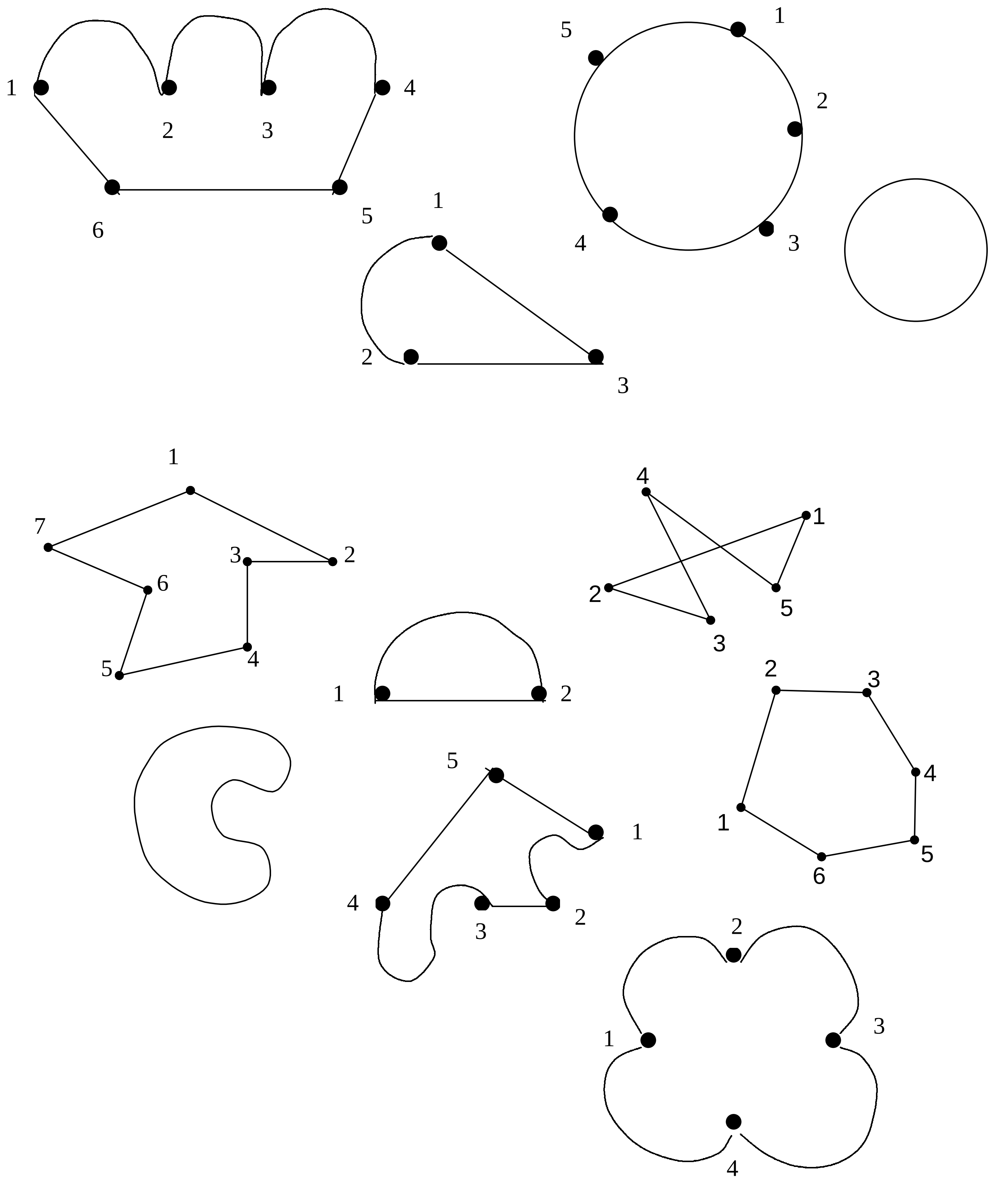
A propos des contraintes délimitant les figures géométriques.

Les figures géométriques que nous retenons et à partir desquelles nous construisons une première activité *structurée* et *cohérente* se définissent de la manière suivante.

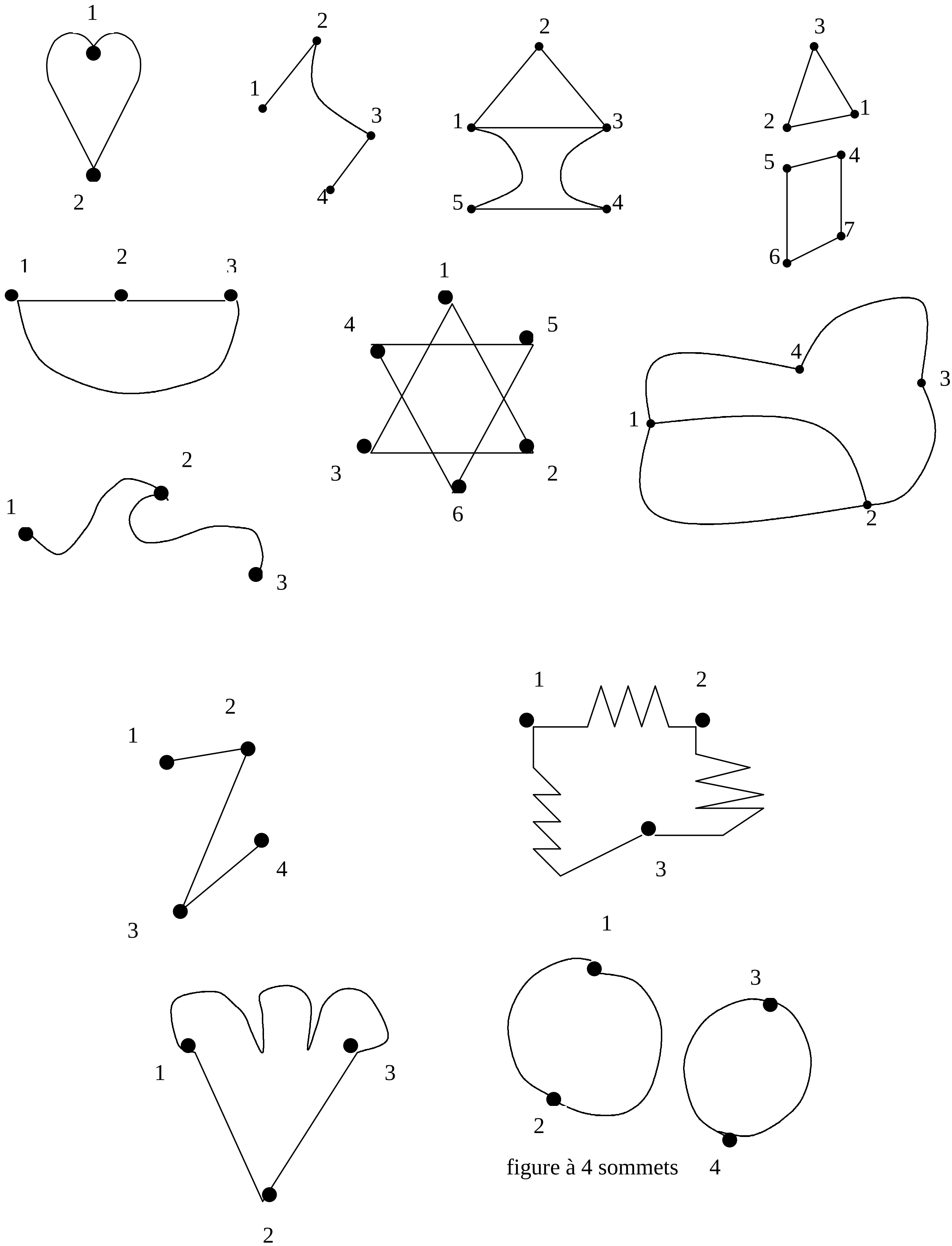
Par définition, les figures géométriques sont formées de côtés et de sommets de telle manière que:

- les sommets sont des points et les côtés sont soit droits, soit courbes;
- les côtés droits sont des segments de droite dont les extrémités sont des sommets;
- les côtés courbes sont tantôt des courbes fermées sans sommet, tantôt des arcs de courbe dont les extrémités sont des sommets;
- les côtés courbes sont "lisses", sans aspérité (sans pointe) sauf éventuellement aux sommets;
- tout sommet est l'extrémité d'exactement deux côtés;
- la figure est en une seule partie (connexe), ce qui signifie qu'il est possible de passer de tout point de la figure à tout autre point de la figure sans quitter celle-ci;
- deux côtés droits consécutifs ne sont jamais alignés

<u>Exemples de figures géométriques:</u>



Contre-exemples: dessins de *figures qui ne sont pas des figures géométriques*.



En résumé, une définition des figures géométriques que nous travaillons à ce stade peut s'exprimer de la manière suivante:

Les figures géométriques planes sont formées de côtés droits et/ou de côtés courbes de telle manière que:

- tout sommet est l'extrémité d'exactement deux côtés;
- la figure est en une seule partie;
- les côtés courbes sont lisses, dépourvus d'aspérité (sans pointe) sauf éventuellement aux extrémités;
- deux côtés droits consécutifs ne sont jamais alignés

**Il découle immédiatement de la définition adoptée, que dans le plan, il existe 3 types de figures géométriques**.

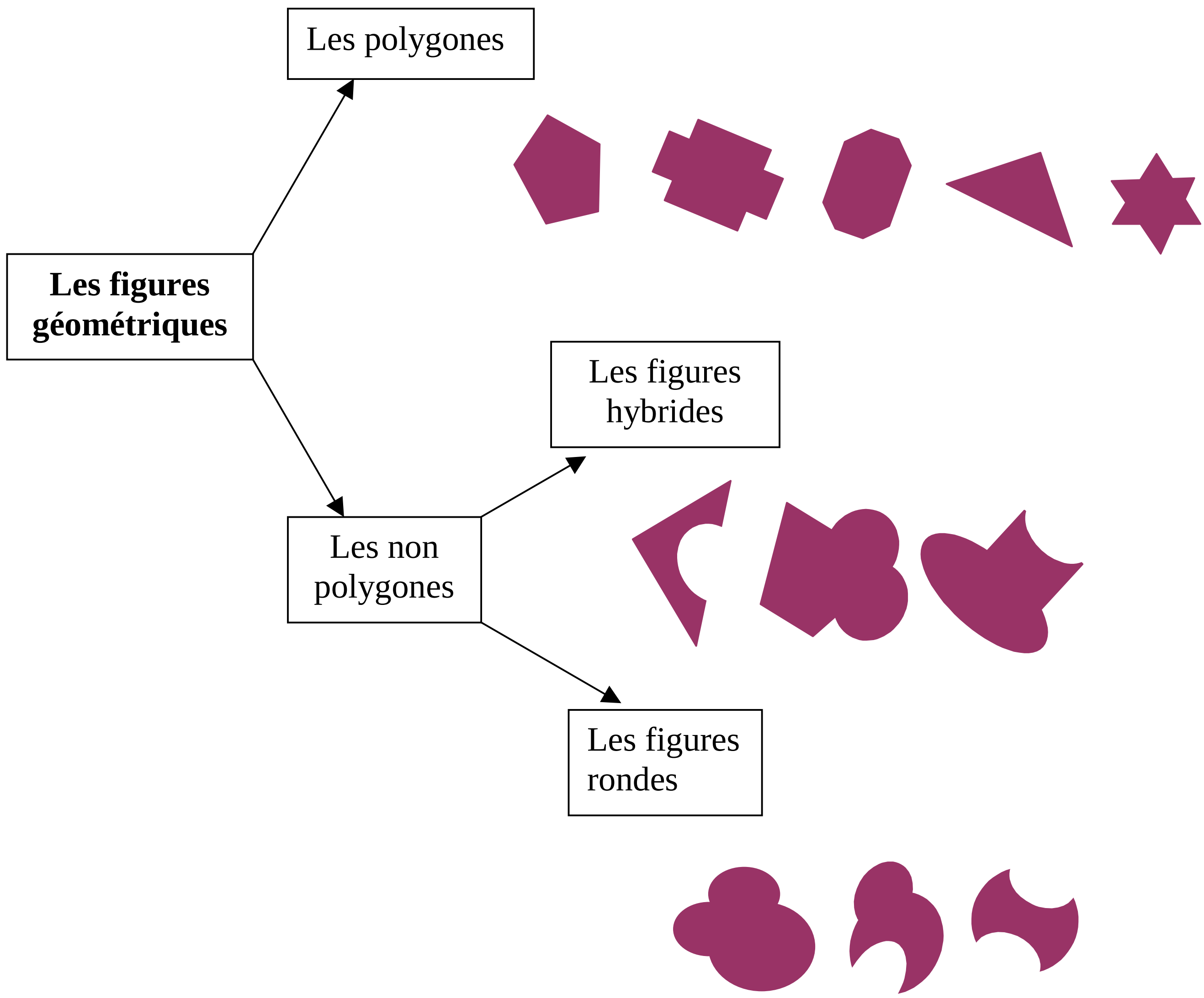
Les figures géométriques dont tous les côtés sont des segments de droites: **les polygones.**

Les figures géométriques dont tous les côtés sont des côtés "courbes": **les figures rondes.**

Les figures géométriques qui possèdent au moins un côté droit et au moins un côté courbe: les **figures hybrides.**

Le diagramme en arbre ci-joint illustre cette décomposition.

# Classement des figures géométriques planes

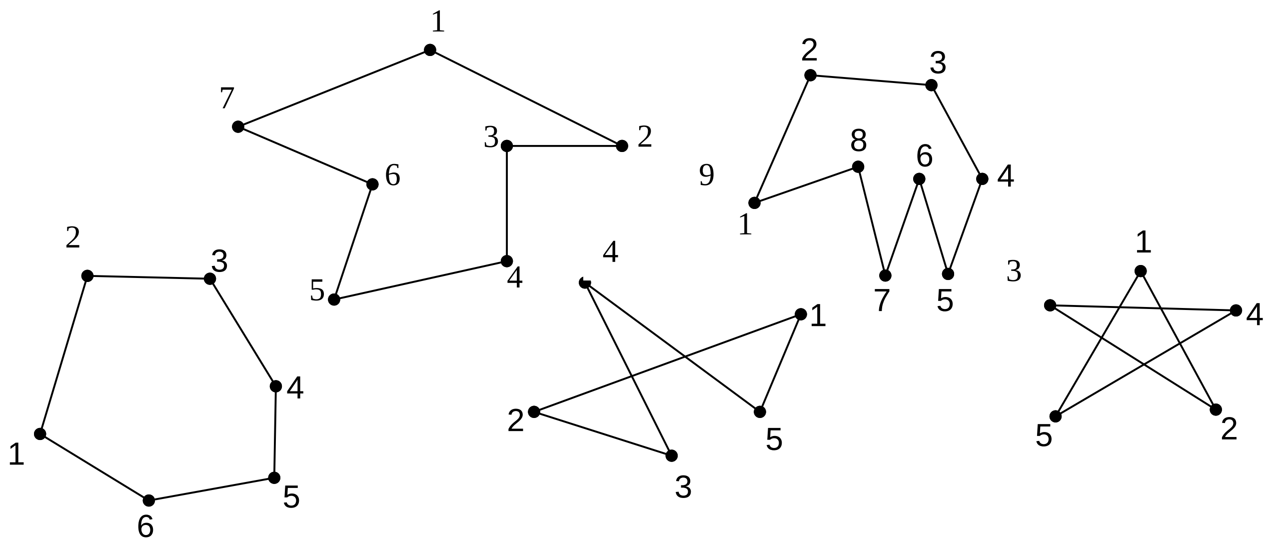



**Remarque:** La façon dont nous avons procédé pour aborder les contraintes liées aux figures géométriques est décrite dans la partie pratique de première année primaire.

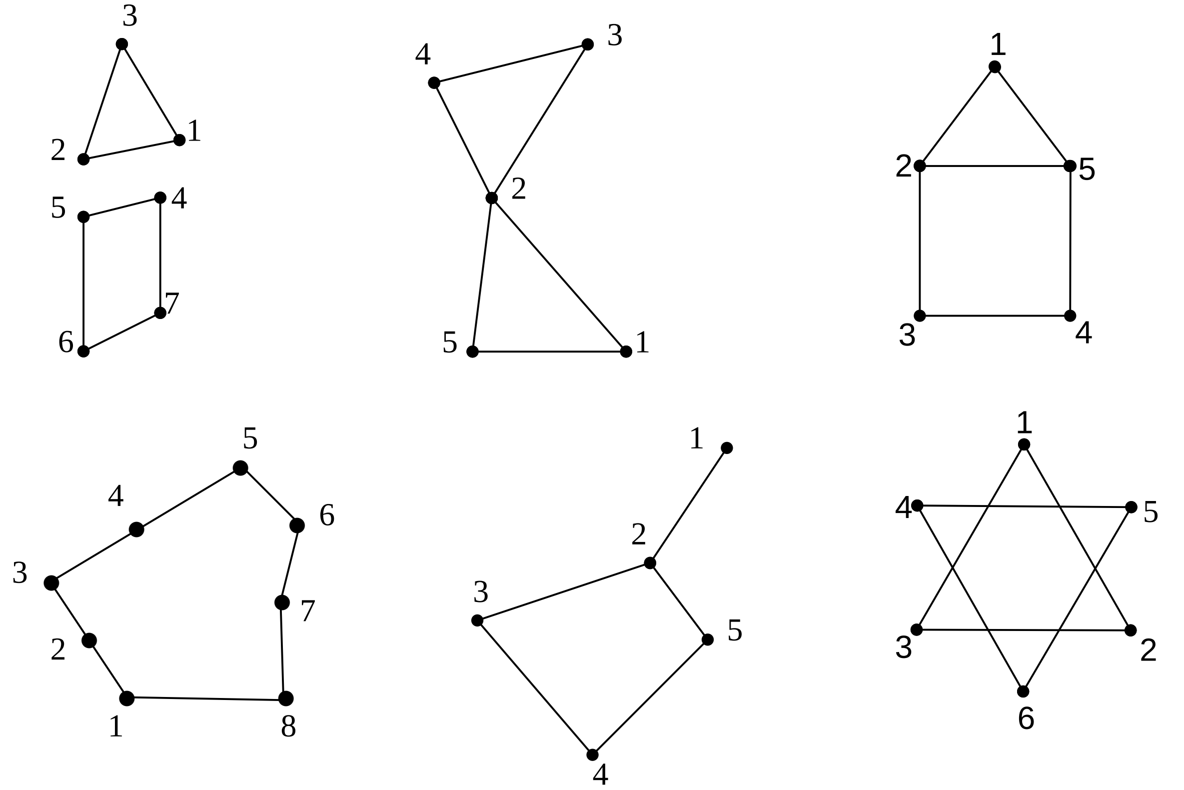
**A propos des polygones du primaire.**

Les polygones abordés au primaire sont des figures géométriques planes ayant un nombre fini de côtés droits et tels que deux côtés consécutifs ne sont jamais alignés.
A titre exemplatif, nous présentons ci-après des exemples et contre-exemples de "polygones du primaire".
Conventionnellement, nous avons pris l'habitude de les nommer, entre nous: "Polygones Euclidiens".

<u>Exemples de polygones euclidiens.</u>



Exemples de figures constituées de segments de droites mais qui ne sont pas des polygones.



## Remarques.

1°) La condition *"Tout sommet est à l'extrémité d'exactement deux côtés"* n'a pas le même sens que *"l'intersection de deux côtés est un sommet"*.
A titre d'exemples, les figures 1 et 2 ont exactement 2 sommets.
La figure 3 possède exactement 4 sommets.
Ces trois figures sont dites non-simples.

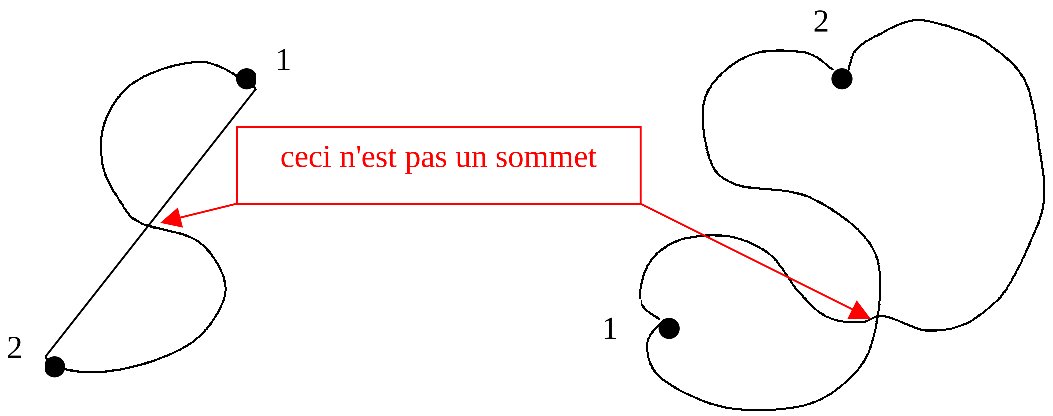



fig.1 fig.2

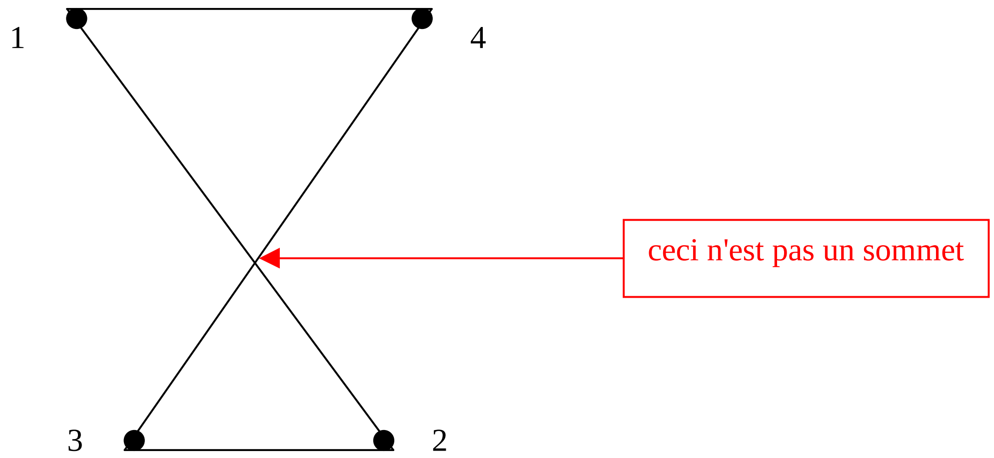


fig.3

2°) La notion de côté courbe lisse (sans aspérité) n'est pas développée dans ces notes mais peut être intuitivement rattachée à la notion de "ligne continue ayant, en chaque point, une tangente qui varie continûment" sauf éventuellement aux sommets des figures.

3°) La contrainte *"deux côtés droits consécutifs ne sont jamais alignés"* que nous imposons dans la définition des figures géométriques a sa raison d'être et est à rattacher aux évolutions théoriques, dans le plan et dans l'espace, de la notion de polygone. en effet, dans les théories actuelles sur les polygones, on considère qu'il existe des polygones plans ou gauches (non-coplanaires) ayant un nombre fini ou infini de sommets alignés ou non.
A titre d'information, une définition recouvrant tous les types de polygones existant dans un plan et dans l'espace est citée ci-après.

<u>Polygones tridimensionnels.</u>

Par définition, les polygones sont constitués de sommets et de côtés tels que:

- les sommets forment un ensemble fini ou infini de sommets;
- tout côté est un segment de droite et ses extrémités sont des sommets;
- tout sommet est l'extrémité d'exactement deux côtés;
- les sommets et les côtés forment une figure connexe.

4°) La notion de connexité est devenue une notion fondamentale tant en mathématique que dans d'autres domaines (réseau routier, réseau informatique, ligne aérienne, jeux, …).

Cette notion est appelée à un développement important dans le futur.

5°) Autres raisons liées aux contraintes adoptées et définissant les figures géométriques planes.

Nous avons cité ci avant des raisons théoriques qui nous ont poussés à faire *découvrir* et *s'approprier* par les élèves, dès la première année primaire, les contraintes délimitant les figures géométriques dont les polygones.
Des raisons plus pédagogiques nous ont également incités à pratiquer de la sorte; en effet, notre souhait est de familiariser les élèves, dès l'initiation, à une véritable activité géométrique aussi complète que possible.

L'activité géométrique pratiquée au cours de nos activités se définit *(semblablement à B.GOLFART et J.THEPOT)* comme composée de deux phases distinctes, complémentaires, qui se succèdent continuellement: une phase inductive et une phase déductive.

Au cours de la phase inductive, l'élève donne libre cours à son imagination, il observe, manipule, compare, découpe, assemble, superpose, déplace, retourne, représente, construit, dessine, établit des analogies …émet une ou plusieurs propositions qu'il mettra ensuite en doute.

Dans la phase déductive, il justifie la véracité éventuelle des propositions émises et les enchaîne d'une manière "rigoureuse" à partir de prémisses "soigneusement" formulées.

Il en résulte que, idéalement, les enfants soient capables de retrouver (conjecturer) par eux-mêmes des propriétés liées à des familles de figures; c'est à dire, à trouver des qualités qui sont vérifiées par *tous* les membres d'une même famille.

A ce sujet, la propriété qui affirme que *"dans tout polygone, les nombres de côtés et d'angles sont égaux au nombre de sommets"* est la première propriété que l'on peut espérer voir conjecturer oralement en fin de première année primaire. Pour ce faire, les enfants doivent "analyser" beaucoup d'exemples dont certains créés par eux-mêmes.

S'ils n'ont pas été sensibilisés aux critères qui déterminent les polygones, il leur sera impossible de retrouver d'eux-mêmes l'une ou l'autre propriété classique liée à tous les membres de la famille des polygones.

A titre d'exemple, beaucoup d'enfants proposent spontanément comme polygones, des figures analogues aux figures 1 et 2 que voici:

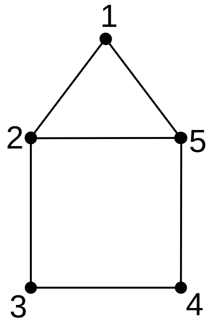



fig.1

5 sommets
6 côtés
7 angles

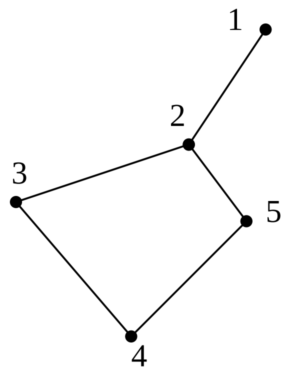



fig.2

5 sommets
5 côtés
4 angles

Si les enfants ne reçoivent aucune information leur permettant de les réfuter comme membres de la famille des polygones, elles deviennent alors, pour eux, des polygones.
Dès lors, il ne sera plus possible aux élèves de retrouver par eux-mêmes la propriété liant les nombres de côtés, d'angles et de sommets.

Il est bien évident qu'aucune définition n'est "plaquée" ou imposée telle quelle.
Pour amener les enfants à une découverte progressive des "définitions", nous avons joué avec leur "imaginaire" et décrit le conte des "Bonshommes Citrons.
Au cours de cette histoire, nous avons raconté, que le "Roi de la planète Citron" impose des contraintes géométriques à respecter pour construire des enclos (figures géométriques):

1°) l'enclos (la figure géométrique) doit être fermé;

2°) les côtés sont soit droits, soit courbes lisses (sans pointe);

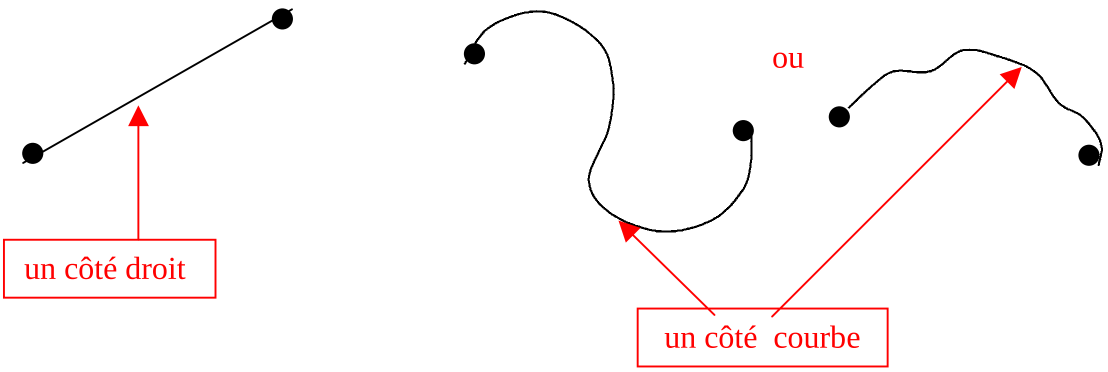
3°) en chaque "piquet" (sommet) de l'enclos, il arrive exactement 2 côtés droits et/ou courbes;

4°) deux côtés droits consécutifs ne sont jamais alignés;

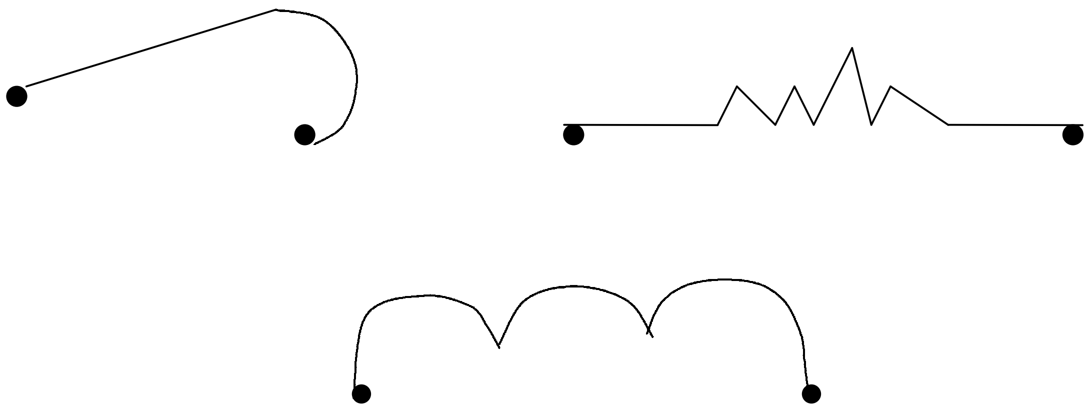
5°) les enclos (figures géométriques) sont en une seule partie.

<u>Ajoutons encore que la deuxième contrainte (ci-dessus) a été explicitée à partir d'exemples et de contre-exemples.</u>

Voici des modèles de côtés d'enclos acceptés "sur la planète Citron":




Voici des modèles de côtés d'enclos refusés "sur la planète Citron".



En ce qui concerne la construction des "maisons " ou solides géométriques, le même principe de "règles imposées par le Roi de la planète Citron" a été également exploité.

# 6.2. Les solides géométriques dans l'enseignement fondamental

## Solides géométriques et polyèdres.

Les évolutions théoriques[1] de la notion de polygones et de polyèdres ont amené une modification des critères pour définir les polyèdres.
On est passé de "toutes les faces sont planes" au critère "toutes les faces sont des polygones (plans et/ou gauches[2])".
Ces changements de critères ont entraîné naturellement l'émergence de nouveaux types de solides; à savoir

- √ les corps ronds: *" toutes les faces sont des faces courbes planes ou non planes"*.

- √ les corps hybrides: *"au moins une face plane hybride et au moins une face non plane courbe"*.

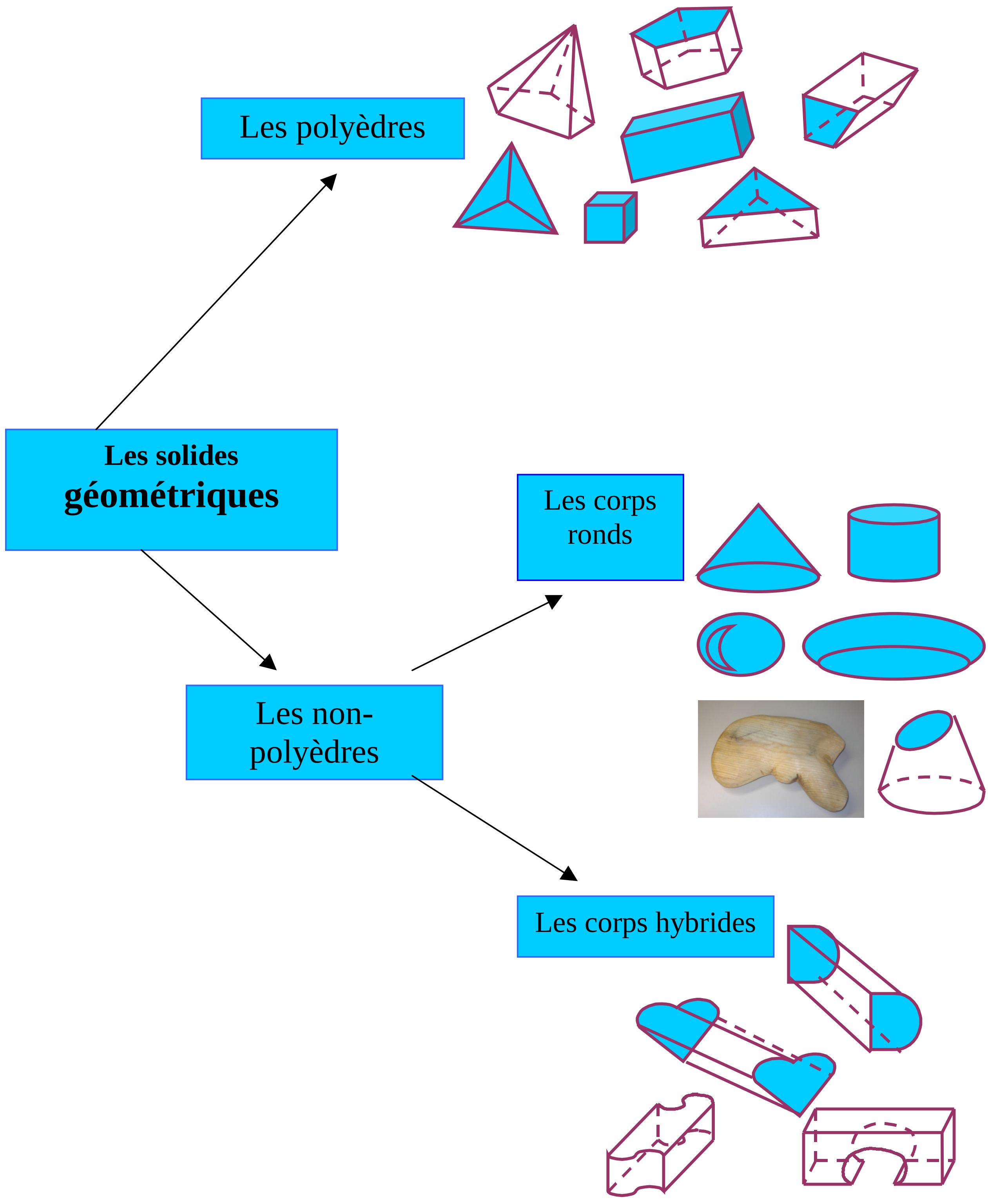
Le classement des solides que nous avons adopté pour les enfants résulte donc d'une part de la nature des faces et d'autre part de l'analogie qu'il présente avec le classement des figures planes.
Le classement qui en découle est obtenu en rangeant les solides géométriques analysés en polyèdres et en non polyèdres; ces derniers se scindant en corps ronds et en corps hybrides.

Le schéma en arbre présenté ci-après illustre ce classement.

*Ce classement ne présente aucune difficulté pour les très jeunes enfants, pour peu que l'approche didactique soit cohérente du point de vue de la matière, progressive et respecte le niveau des élèves.*

[1] Voir à ce sujet la partie "Les solides et figures géométriques au primaire – Aspect théorique".
[2] Des polyèdres peuvent avoir des faces gauches.

# Classement des solides géométriques



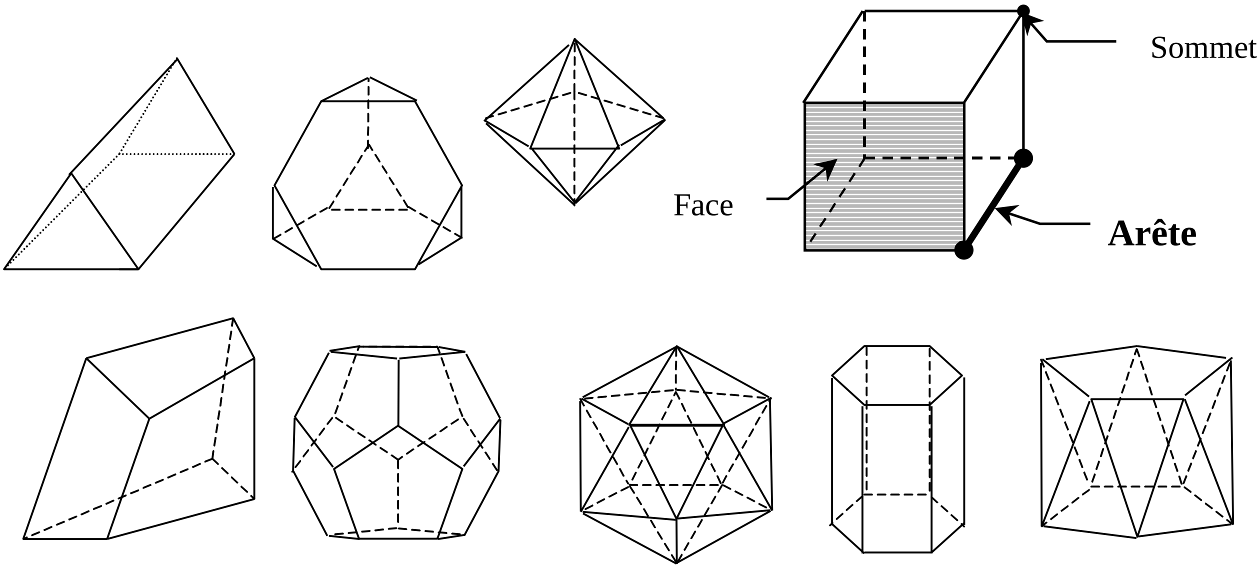
**Définitions adoptées dans l'Enseignement Fondamental, pour les polyèdres, les corps ronds, les corps hybrides et les non polyèdres.**

<u>Définition de polyèdre.</u>

> **Un polyèdre est un solide géométrique dont toutes les faces sont des polygones, telles que:**
>
> - toute arête est un côté de deux faces;
> - le solide est en une seule partie;
> - aucun sommet n'est commun à plusieurs angles polyèdres.
> - deux faces contiguës ne sont jamais dans un même plan.

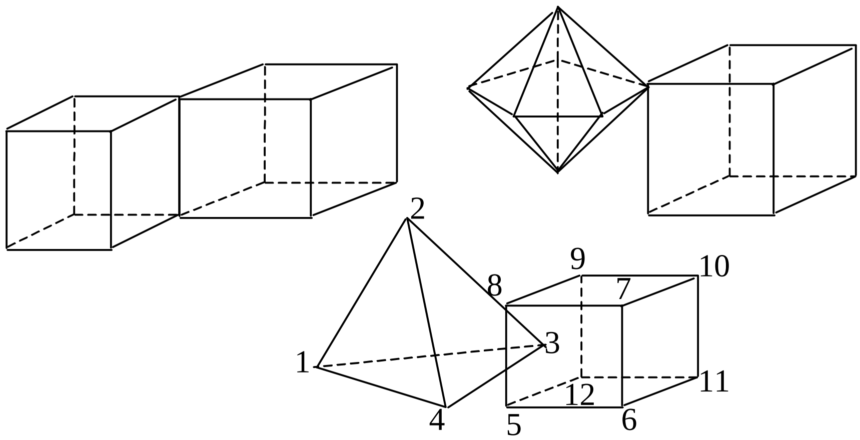
Remarque.
On peut montrer que sur base de ces caractéristiques, en chaque sommet il arrive au minimum 3 faces.

<u>Exemples de polyèdres.</u>



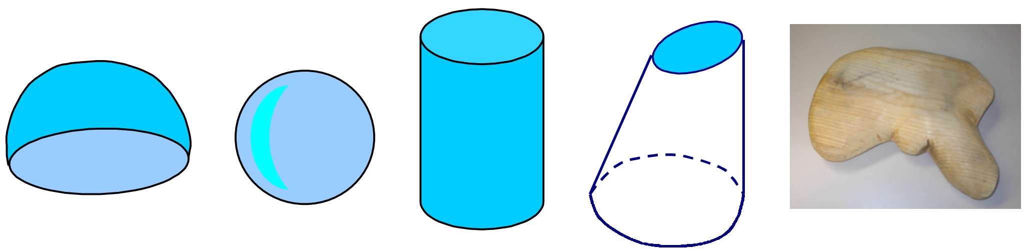

Remarque: **La façon dont nous avons procédé pour aborder les contraintes liées aux polyèdres est décrite dans la partie pratique de ces notes.**

Exemples de solides formés de faces polygonales, qui ne sont pas des polyèdres.




## Définition de corps rond.

Par définition, un corps rond est un "*solide géométrique dont toutes les faces sont des faces courbes (non-planes) ou (et) des faces planes rondes*".

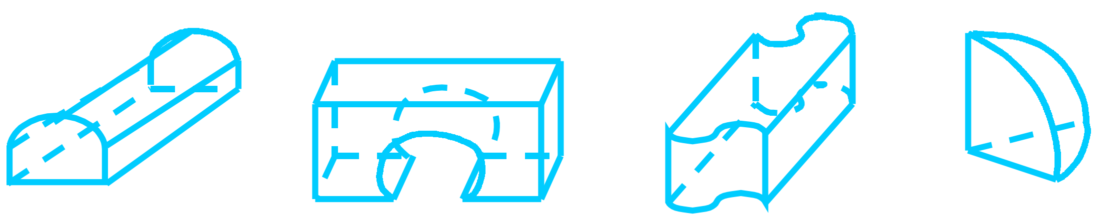


## Définition de corps hybride.

Par définition, un corps hybride est un *"solide géométrique où il existe au moins une face hybride."*

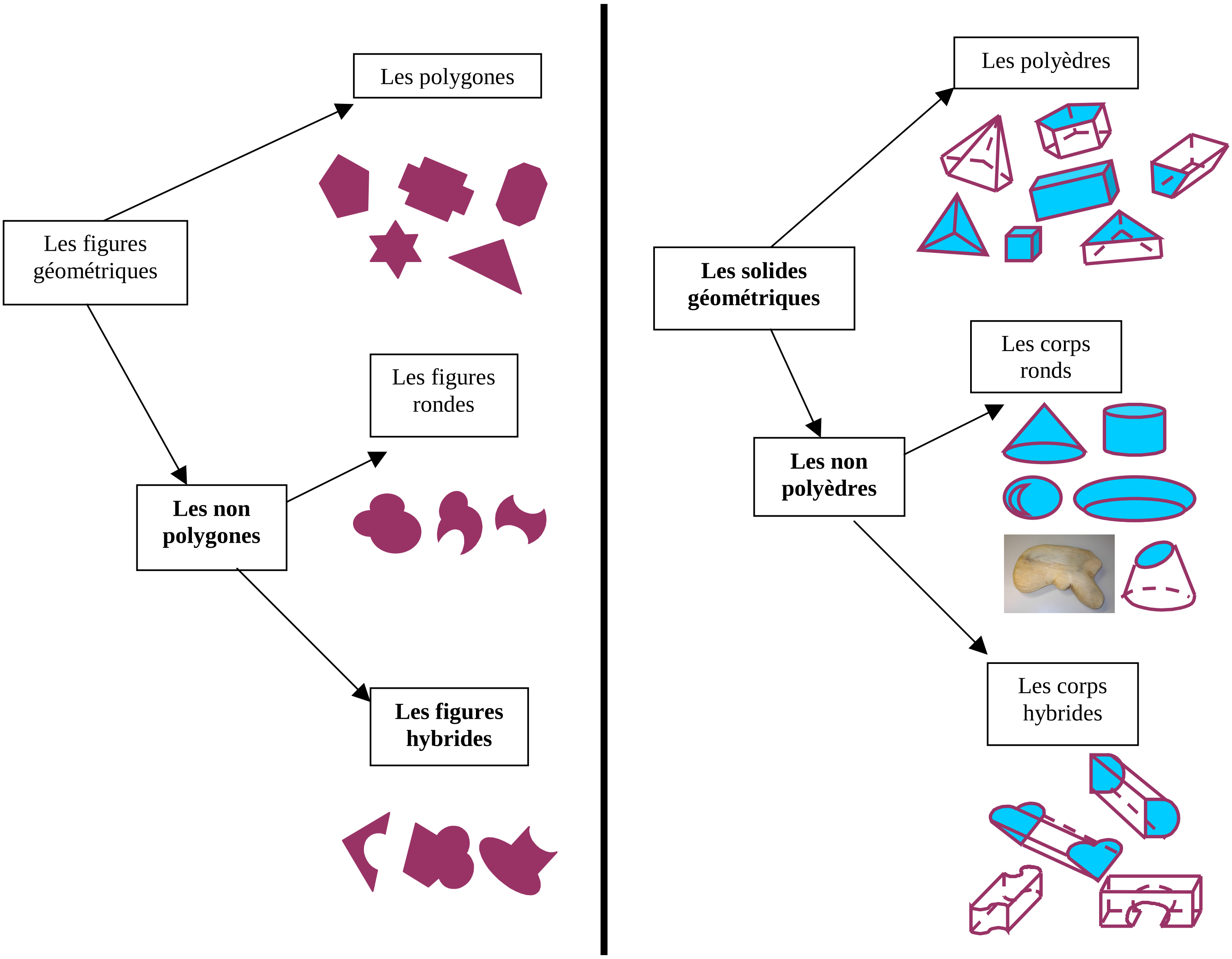
**<u>Remarques</u> : - Un corps hybride est un solide géométrique où il existe au moins une face hybride et au moins une face courbe (non plane)**

**- Certains corps hybrides possèdent aussi une face polygonale.**



## Définition de non-polyèdre.

Par définition, un non-polyèdre est un *"solide géométrique pour lequel il existe au moins une face non polygonale."* ou encore
Un non polyèdre est *"un solide géométrique où il existe au moins une face courbe non plane."*




# Remarques.

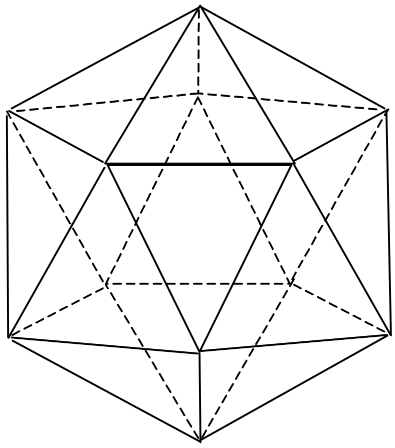
1°) Les critères retenus pour classer les solides géométriques ont pour avantage

√ d'une part, d'aboutir à un classement des solides géométriques analogue aux classements des figures géométriques planes.
√ d'autre part d'être des critères géométriques et non pas des critères non mathématiques comme par exemple *"solides qui roulent ou ne roulent pas"* ou *"solides boules ou non boules"*.

2°) Le critère *"toute arête est un côté de deux faces polygonales"* , dans les définitions de polyèdres, peut paraître précoce et donc inutile dans l'enseignement fondamental. Rien n'est plus faux si l'on veut rencontrer un des souhaits des "Socles de Compétences" sur les solides.

Il y est demandé, à la page 29, de *"dénombrer les faces, les arêtes et les sommets sur des solides"* et "*d'établir des relations entre ces éléments".*

A titre d'exemple, illustrons ces souhaits à partir de la recherche du nombre d'arêtes d'un polyèdre formé de 20 triangles équilatéraux (l'icosaèdre régulier).



Chaque face triangulaire apporte 3 arêtes.

Comme il y a 20 faces triangulaires, il y a apparemment 20 x 3 arêtes.

Mais comme toute arête est un côté de 2 faces, il en résulte que les arêtes ont été comptées deux fois, par ce raisonnement.

Dès lors, le nombre d'arêtes vaut :

$$\frac{20 \text{ X } 3 \text{ arêtes}}{2}$$

3°) Les faces, les arêtes et les sommets des solides géométriques sont tels que:

- les arêtes sont soit droites, soit courbes et sont les côtés des figures constituant les faces.
- toute arête est un côté de deux faces.
- les extrémités des arêtes sont des sommets du solide.
- dans les non-polyèdres, il peut exister des sommets qui n'appartiennent à aucune arête.
- les solides géométriques sont en une seule partie.
- il existe des solides géométriques formés d'une seule face courbe fermée sans arête ni sommet.
- deux faces planes contiguës ne sont jamais dans un même plan.

## 6.3. Les transformations du plan dans l'Enseignement Fondamental

# 6.3.1. Figures planes déformées - figures planes non déformées

## 1. Figures planes déformées - figures planes non déformées

Après transformation du plan, une figure plane est soit déformée, soit non déformée (= semblable).

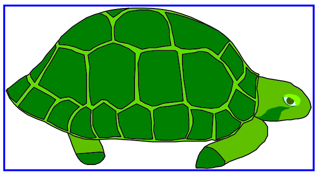
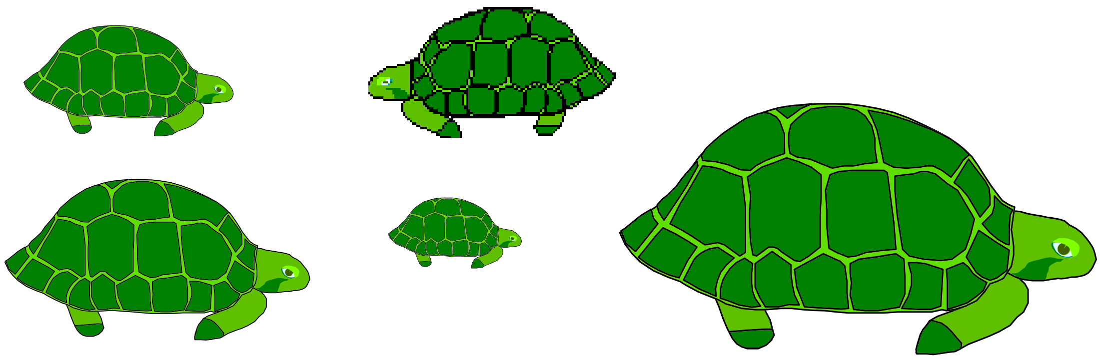


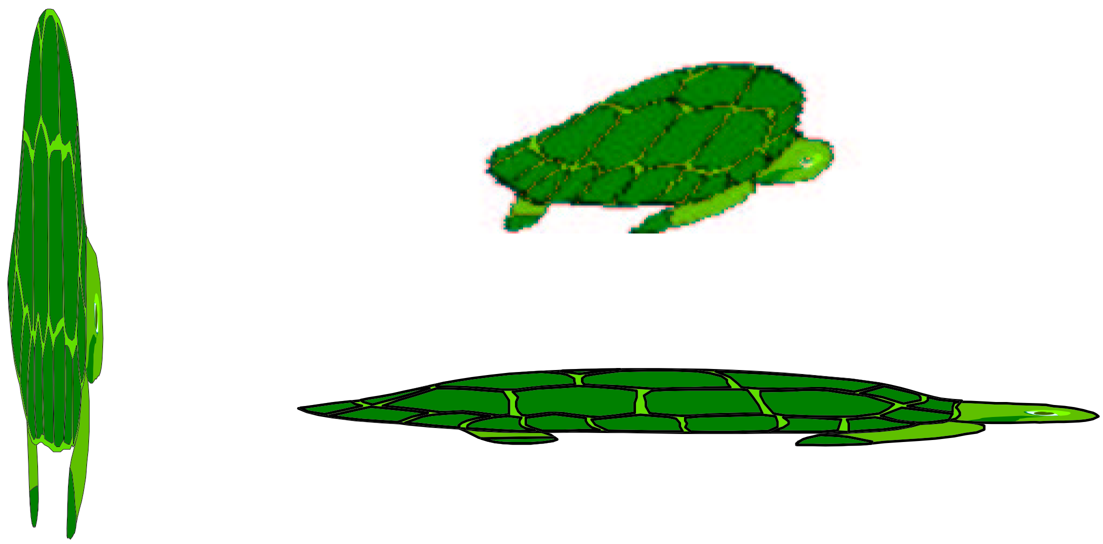
Figure initiale

A. Exemples de figures planes non déformées par rapport à la figure initiale.



**Une figure plane non déformée est une figure semblable.**

B. Exemples de figures planes déformées par rapport à la figure initiale.



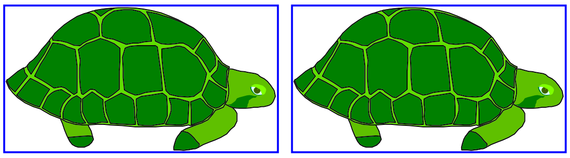
# 6.3.2. Figures planes isométriques
# Figures planes déplacées
# Figures planes retournées

## A. figures isométriques (premières définitions)

Deux figures planes sont isométriques si et seulement si on peut amener exactement l'une sur l'autre à l'aide d'un transparent.

Exemples

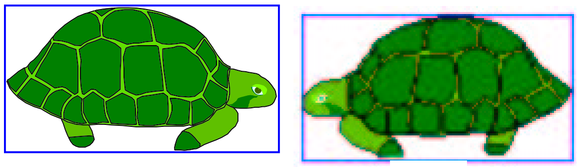
1)



$F_1$ $F_2$

$F_1$ est isométrique à $F_2$.

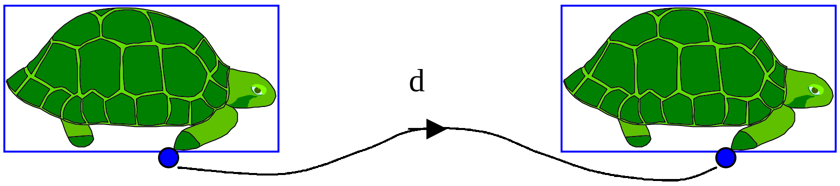
2)



$F_3$ $F_4$

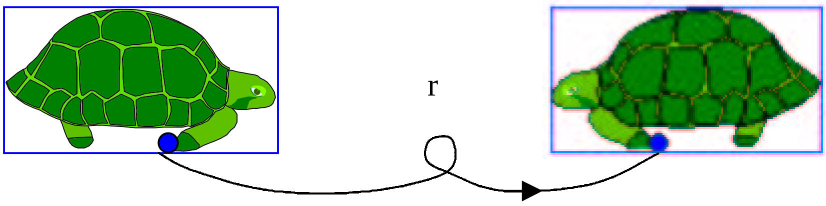
$F_3$ est isométrique à $F_4$.

## B. Figures superposables par déplacement (figures isométriques déplacées)




Deux figures planes sont superposables par **un déplacement** du plan si on peut, à l'aide d'un transparent, transporter l'une sur l'autre **sans quitter le plan**.

## C. Figures superposables par retournement (figures isométriques retournées)

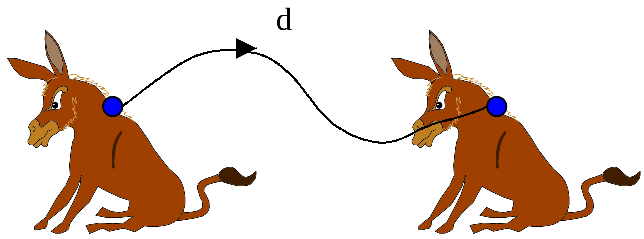



Deux figures planes sont superposables par **un retournement** du plan si, pour transporter l'une sur l'autre à l'aide d'un transparent, on doit **quitter le plan et retourner une fois le transparent.**

## D. Figures isométriques déplacées et/ou retournées

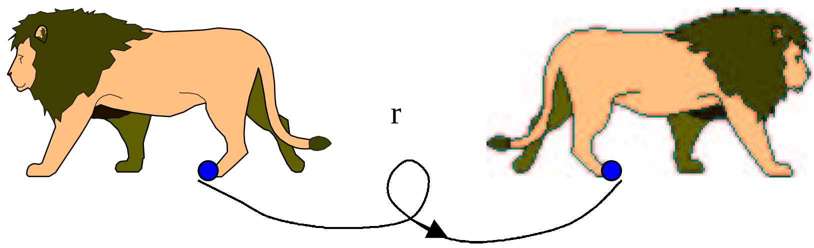
Si deux figures sont isométriques, alors on peut amener l'une sur l'autre soit:

a) uniquement par un **déplacement**



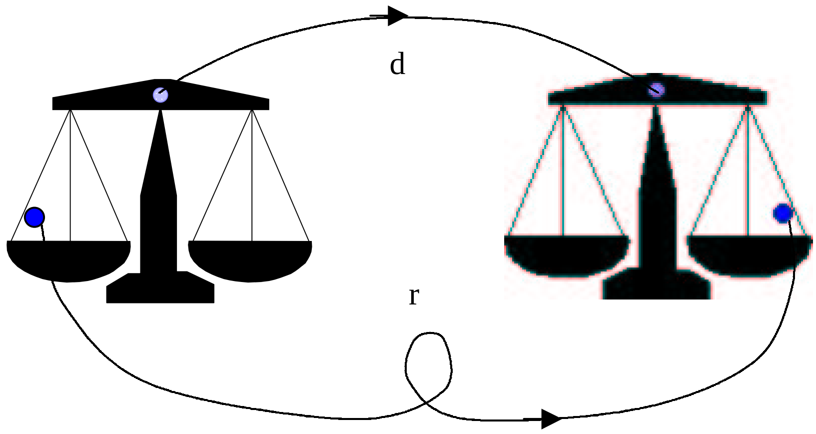

On parle dans ce cas de figures isométriques déplacées ou de figures identiques.

b) uniquement par un **retournement**




On parle dans ce cas de figures isométriques retournées.

c) par **déplacement** et aussi par **retournement**



# 6.3.3. Figures planes proportionnelles
# Figures planes semblables

## **Définitions**

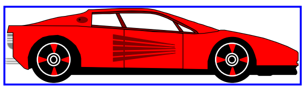
- Deux figures sont semblables (proportionnelles) si toutes les dimensions de l'une sont obtenues en multipliant par un même nombre positif toutes les dimensions de l'autre.

*ou encore*

- Deux figures sont semblables si elles ont la même forme.

$F_1$

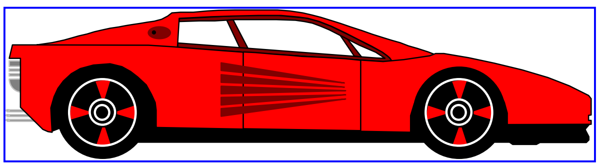
1 cm



4 cm

$F_2$

2 cm



8 cm

Par rapport à $F_1$ , toutes les dimensions de $F_2$ ont été multipliées part "2".

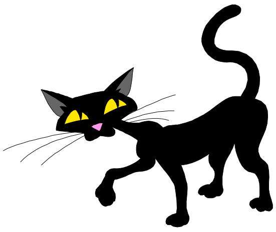
Par rapport à $F_2$, toutes les dimensions de $F_1$ ont été multipliées par "1/2".

# 6.3.4. Figures semblables (proportionnelles) agrandies - réduites - isométriques

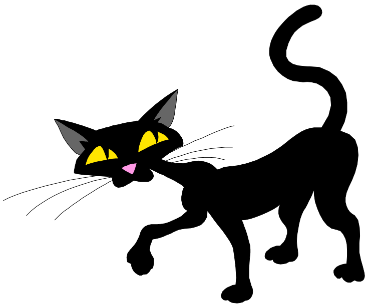
## 4. 1. Figures agrandies - Figures réduites - Figures isométriques

Lorsque deux figures sont semblables, trois cas sont possibles:

♦ soit la figure semblable est **agrandie** par rapport à la figure initiale ($F_0$).



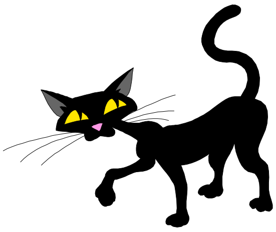
$F_0$



$F_1$

*La figure $F_1$ est semblable "agrandie-déplacée" par rapport à la figure $F_0$.*

♦ soit la figure semblable est **réduite** par rapport à la figure initiale.



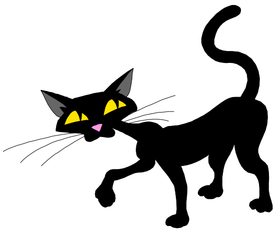
$F_0$

$F_2$

*La figure $F_2$ est semblable "réduite-retournée" par rapport à la figure $F_0$.*

♦ soit la figure semblable est **isométrique** par rapport à la figure initiale.

Dans ce cas, les dimensions correspondantes des deux figures sont les mêmes.



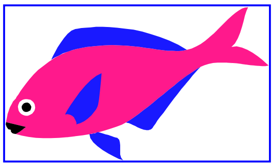
$F_0$

$F_3$

*La figure $F_3$ est semblable" isométrique-retournée" par rapport à la figure $F_0$.*

## 4.2. Les différents cas des figures semblables ou proportionnelles

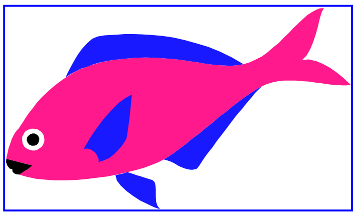
Comme indiqué au point 4.1., lorsque deux figures sont semblables, trois cas sont possibles:
*Par rapport à la figure initiale $F_0$ , la figure semblable obtenue est soit agrandie proportionnellement, soit réduite proportionnellement, soit isométrique."*
Pour chacun de ces trois cas, il faut distinguer aussi les figures "*déplacées*" des figures "*retournées*".



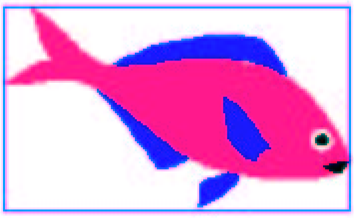
$F_0$

Ainsi, les exemples ci-dessous illustrent les six cas possibles des figures semblables (proportionnelles) par rapport à la figure $F_0$.

a) Des figures semblables agrandies déplacées ($F_1$) et des figures semblables agrandies retournées ($F_2$).



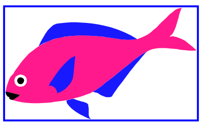
$F_1$



$F_2$

*Toutes les dimensions sont multipliées par un nombre strictement plus grand que un.*

b) Des figures semblables réduites déplacées ($F_3$) et des figures semblables réduites retournées ($F_4$).

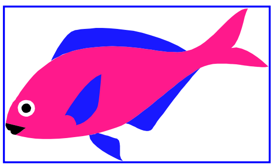


$F_3$

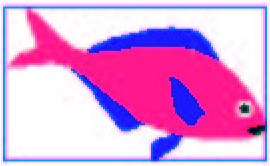
$F_4$

*Toutes les dimensions sont multipliées par un nombre compris entre 0 et 1 (0 et 1 non compris).*

c) Des figures semblables isométriques déplacées ($F_5$) et des figures semblables isométriques retournées ($F_6$).



$F_5$



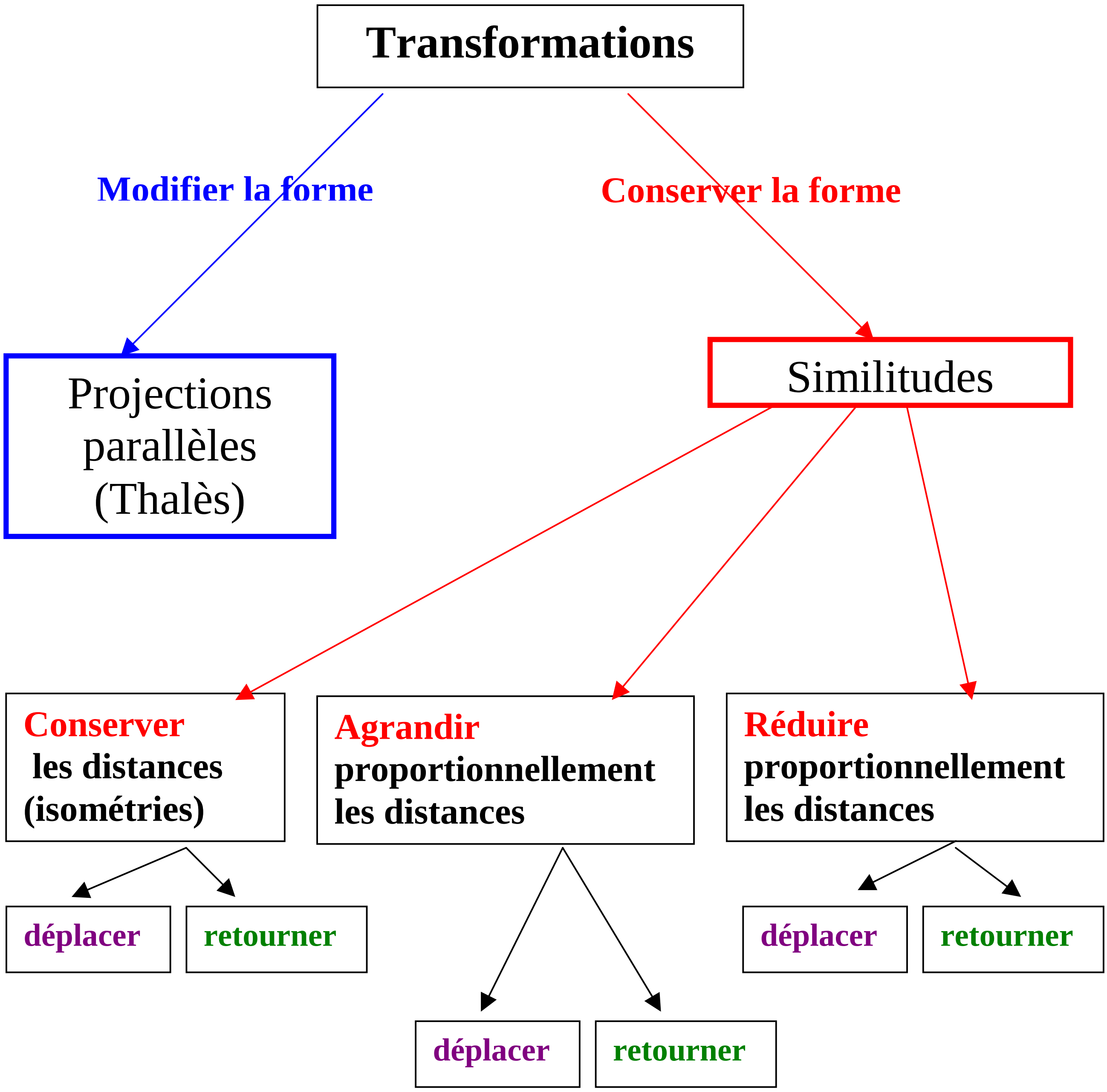
$F_6$

*Toutes les dimensions sont multipliées par 1.*

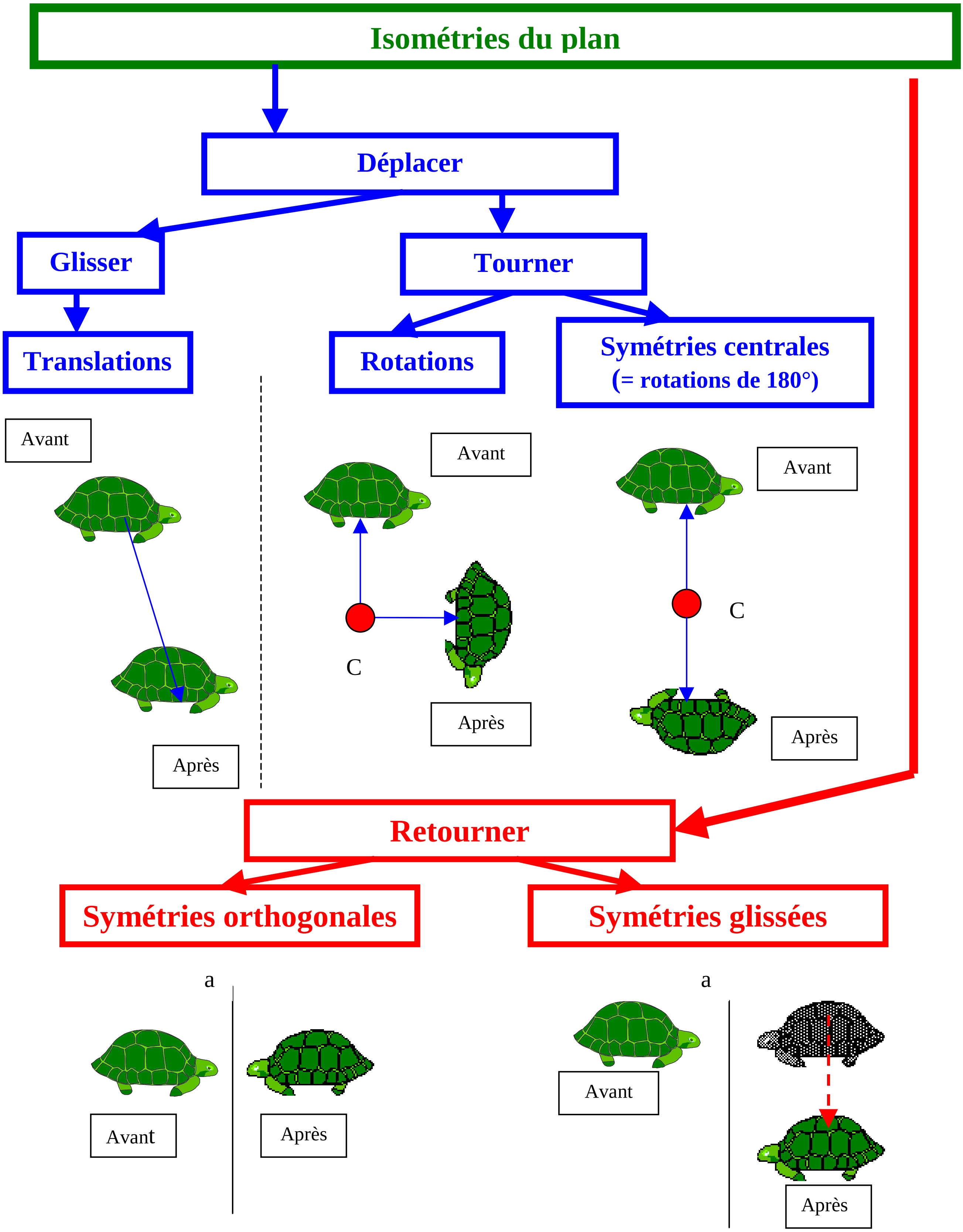
## 6.3.5. Synthèse des transformations

# Structure des transformations en géométrie élémentaire

Il s'agit des transformations avec lesquelles on peut étudier les figures géométriques et les solides géométriques en mathématique élémentaire.



## 6.3.6. Tableau récapitulatif des isométries du plan



# Figures non déformées - Figures semblables - Figures proportionnelles

## 6.3.7. Tableau récapitulatif des similitudes du plan

*Proportionnellement:* *Toutes les distances sont multipliées par un même nombre strictement positif*

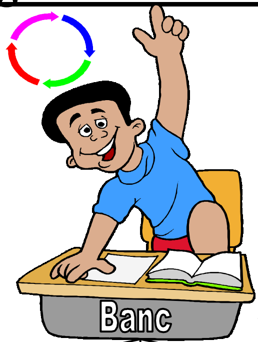



Figure initiale

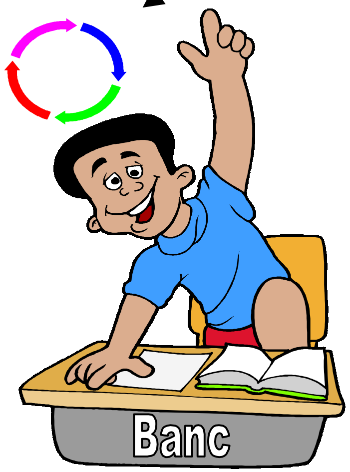
Agrandir toutes les distances

Conserver toutes les distances (Isométriques)

Réduire toutes les distances

**Agrandir toutes les distances**

Déplacer



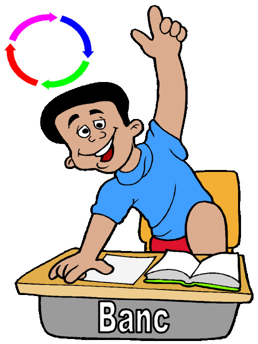

* Figure agrandie déplacée
* Sens giratoire conservé
* Type de dessin de main conservé
* Orientation conservée

Retourner

* Figure agrandie retournée
* Sens giratoire inversé
* Type de dessin de main inversé
* Orientation inversée

**Conserver toutes les distances (Isométriques)**

Déplacer



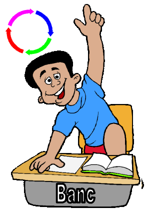

* Figure isométrique déplacée
* Sens giratoire conservé
* Type de dessin de main conservé
* Orientation conservée

Retourner

* Figure isométrique retournée
* Sens giratoire inversé
* Type de dessin de main inversé

**Réduire toutes les distances**

Déplacer




* Figure réduite déplacée
* Sens giratoire conservé
* Type de dessin de main conservé

Retourner

* Figure réduite retournée
* Sens giratoire inversé
* Type de dessin de main inversé
* Orientation inversée

## 6.4. Types de transformations en "Géométrie des Transformations"

**Il s'agit des types de transformations avec lesquelles on étudie les figures et les solides en mathématique élémentaire.**

### 6.4.1. Transformations pour la géométrie plane

#### A. Conserver la forme des figures (les similitudes)

**Isométries (planes)**
Les isométries sont les transformations qui conservent les distances.

- ♦ Les isométries se composent de deux "sous-familles" : les déplacements et les retournements (*voir à ce sujet, les approches intuitives au point 6.3.2.).*
  - – Les déplacements sont les isométries qui conservent les types d'orientations du plan.
  - – Les retournements sont les isométries qui inversent les types d'orientations du plan.

- ♦ On peut montrer que dans le plan:
  - – les déplacements se réduisent aux rotations (symétries centrales) et aux translations.
  - – Les retournements se réduisent aux symétries orthogonales et aux symétries glissées.

**Homothéties (planes)**
Les homothéties sont les transformations qui multiplient toutes les distances par un nombre réel strictement positif et telles que l'image de toute figure est une figure "parallèle" à la figure intiale.
Si ce "réel" est différent de 1, alors l'image d'une figure par cette homothétie est agrandie ou réduite proportionnellement et est "parallèle" à la figure initiale.

Remarques :
- Il existe des homothéties de rapport positif ou de rapport négatif
- Les homothéties de rapport $\pm 1$ conservent les distances
- Dans un plan, les homothéties conservent les types d'orientations du plan et ce, quelle que soit la valeur du rapport.

**Similitudes (planes)**
- Les similitudes sont les composées d'homothéties avec des déplacements et/ou des retournements
- Les similitudes multiplient toutes les distances par un nombre réel strictement positif.

Remarque:
Les similitudes planes conservent ou inversent les types d'orientations du plan selon le nombre de retournements intervenant dans la similitude.

## B. Modifier la forme

Les transformations qui modifient la forme, et "étudiées" en géométrie élémentaire sont les projections parallèles (les projections solaires).

# 6.4.2. Transformations pour la géométrie de l'espace

## A. Conserver la forme des solides (les similitudes)

**Isométries**
Les isométries sont les transformations qui conservent les distances.

- ♦ Les isométries se composent de deux "sous-familles" : les déplacements et les retournements.
  - Les déplacements sont les isométries qui conservent les types d'orientations de l'espace.
  - Les retournements sont les isométries qui inversent les types d'orientations de l'espace.

- ♦ On peut montrer que dans l'espace:
  - les déplacements se réduisent aux translations - aux rotations - aux vissages.
  - les retournements se réduisent aux symétries centrales - aux symétries bilatérales - aux symétries bilatérales glissées - aux antirotations.

**Homothéties**
Les homothéties sont les transformations qui multiplient toutes les distances par un nombre réel strictement positif et telles que l'image de tout solide est un solide "parallèle" au solide initial.

Si ce "réel" est différent de 1, alors l'image d'un solide par cette homothétie est agrandie ou réduite proportionnellement et est "parallèle" au solide initial.

Remarques :
- Il existe des homothéties de rapport positif ou de rapport négatif
- Les homothéties de rapport $\pm 1$ conservent les distances
- Dans l'espace, les homothéties de rapport positif conservent les types d'orientations de l'espace.
- Les homothéties de rapport négatif inversent les types d'orientation de l'espace.

**Similitudes**

- Les similitudes dans l'espace sont des composées d'homothéties avec des déplacements et/ou des retournements de l'espace.
- Les similitudes multiplient toutes les distances par un nombre réel strictement positif.

Remarques:
Les similitudes conservent ou inversent les types d'orientations de l'espace selon le nombre de retournements et le nombre de rapports d'homothéties négatifs intervenant dans la similitude.

## B. Modifier la forme

Les transformations qui modifient la forme et qui sont "étudiées" en géométrie élémentaire sont les projections parallèles (les projections solaires).