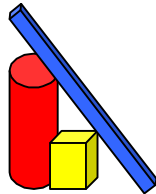


LA GEOMETRIE DES TRANSFORMATIONS dans l'apprentissage des mathématiques



Site WEB : www.uvgt.net

**Le pliage d'une feuille de papier
est-il un bon modèle de représentation
d'une symétrie orthogonale plane?**

**Michel DEMAL – Jacques DUBUCQ
Danielle POPELER**

*U.V.G.T - H.E.H - U.M.H. - U.R.E.M. (U.L.B.)
Communauté française de Belgique*

michel.demal@belgacom.net
d.popeler@skynet.be

PLAN

1. Introduction
2. La géométrie actuelle ou la Géométrie des Transformations de 5 à 18 ans
3. Importance du choix de "bons" modèles concrets pour l'appropriation des images mentales des transformations.
4. Modèles pour les symétries orthogonales planes
 - 4.1. Caractéristiques des symétries orthogonales planes
 - 4.2. Axe de symétrie d'une figure .
 - 4.3. Le pliage d'une feuille de papier est-il ou n'est-il pas un bon modèle pour illustrer la notion de symétrie orthogonale plane?
5. Pliage et axe de symétrie d'une figure F.
6. Modèles pour illustrer les symétries orthogonales planes.
7. La genèse des symétries orthogonales planes.
 - 7.1. Introduction
 - 7.2. Installation du concept "symétrie orthogonale plane"

1. Introduction

Les orateurs:

Danielle POPELER (Institutrice)

Michel DEMAL (Professeur de Mathématique)

Jacques DUBUCQ (création des CD et du site Web: www.uvgt.net)

Que faisons- nous ?

Elaboration d'un cours de géométrie du plan et de l'espace pour les 5- 18 ans.

Actuellement, cours complètement réalisé de 5 à 15 ans.

Caractéristiques du cours proposé:

- cohérence de matière et de démarche sur toute la formation.
- progression et continuité au sens où, d'année en année, les " thèmes" sont continûment travaillés et enrichis.

2. La géométrie actuelle ou la Géométrie des Transformations de 5 à 18 ans

Définition:

Géométrie où les transformations sont:

- des "outils" pour découvrir et/ou démontrer des propriétés des objets géométriques
- des "outils" pour créer des objets géométriques (exemple: le snub-cube)
- des "outils" pour classer les objets (regroupements via les groupes de symétries associés aux objets)

Types de transformations utilisés en mathématiques élémentaires (voir CD):

Essentiellement les similitudes du plan et de l'espace:

- isométries (déplacements / retournements)
- homothéties
- composées d'isométries et d'homothéties

Dans le plan:

Déplacements:

translations – rotations (symétrie centrale: rotation de 180°)

Retournements:

symétries orthogonales – symétries glissées

Dans l'espace:

Déplacements:

translations – rotations (symétrie orthogonale: rotation de 180°)-
vissages

Retournements:

symétrie centrale - symétries bilatérales (par rapport à un plan) –
symétries bilatérales glissées - antirotations

Rappel:

Dans le plan, une symétrie orthogonale est un retournement.

Dans l'espace, une symétrie orthogonale est un déplacement.

Dans le plan, une symétrie centrale est un déplacement.

Dans l'espace, une symétrie centrale est un retournement.

3. Importance du choix de "bons" modèles concrets pour l'appropriation des images mentales des transformations.

Idéalement, un bon modèle:

- "recouvre" toutes les caractéristiques et toutes les propriétés de la transformation considérée;
- est en concordance avec la théorie liée aux transformations.

4. Modèles pour les symétries orthogonales planes

Pour illustrer les symétries orthogonales de l'espace, les modèles choisis seront différents.

Rappels:

4.1. Caractéristiques des symétries orthogonales planes

Dans le plan, une symétrie orthogonale

- est déterminée par une droite et la règle: "perpendiculaire - même distance";
- est un retournement qui admet une droite de points fixes;
- conserve la forme et les distances;
- applique une droite sur une droite et un segment sur un segment (de même longueur);
- inverse l'orientation (gauche devient droit et inversement; sens horlogique devient antihorlogique et inversement) ;
- permute les deux demi-plans déterminés par la droite de points fixes.

4.2. Axe de symétrie d'une figure .

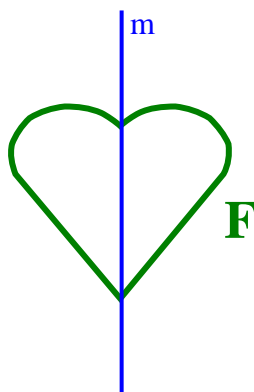
La droite "m" est un axe de symétrie de la figure "F" si et seulement si $S_a(F) = F$

Ou encore

L'image de la figure "F" par la symétrie orthogonale d'axe "m" est la figure elle-même.

Ou encore

La symétrie orthogonale d'axe "m" superpose la figure **F** à elle-même.



$$S_m(F) = F$$

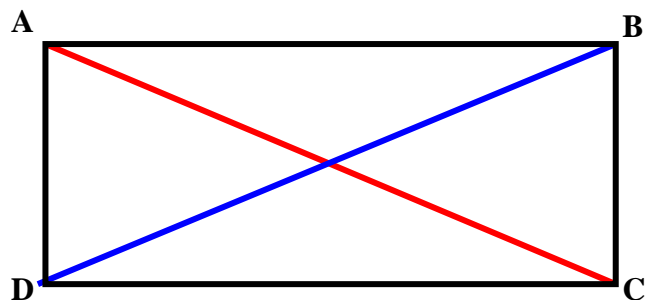
4.3. Le pliage d'une feuille de papier est-il ou n'est-il pas un bon modèle pour illustrer la notion de symétrie orthogonale **plane**?

Malheureusement, le pliage d'une feuille de papier n'est pas un bon modèle pour illustrer la notion de symétrie orthogonale **plane**. En effet, le pliage installe consciemment ou inconsciemment des images mentales incorrectes. Images mentales incorrectes qui ne permettent, pas ou plus, de conceptualiser, d'imaginer les démarches mentales nécessaires à l'élaboration des "preuves" qui font appel aux symétries orthogonales.

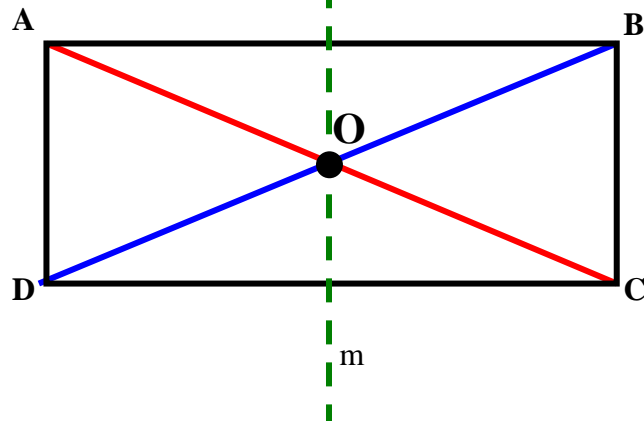
A titre d'exemple, voici comment des élèves qui ont "pratiqué le pliage", justifient que dans un rectangle, les diagonales sont de même longueur (isométriques).

Problème posé:

Justifier que les diagonales d'un rectangle sont isométriques.

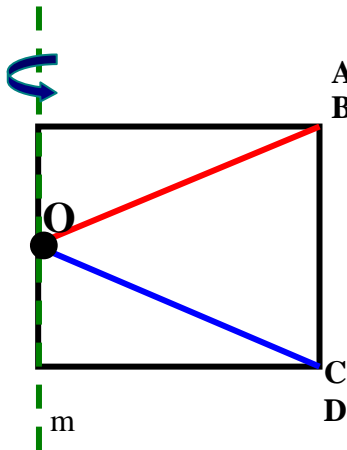


Version "pliage"



Après pliage

1.



Version "pliage"

A	B
O	O
[A O]	[B O]
.....	
D	C
O	O
[D O]	[C O]

2.

$\delta (A O) = \delta (O B)$ car les symétries orthogonales conservent les distances.

$\delta (D O) = \delta (O C)$ car les symétries orthogonales conservent les distances.

3.

$$\delta (A C) = \delta (A O) + \delta (O C)$$

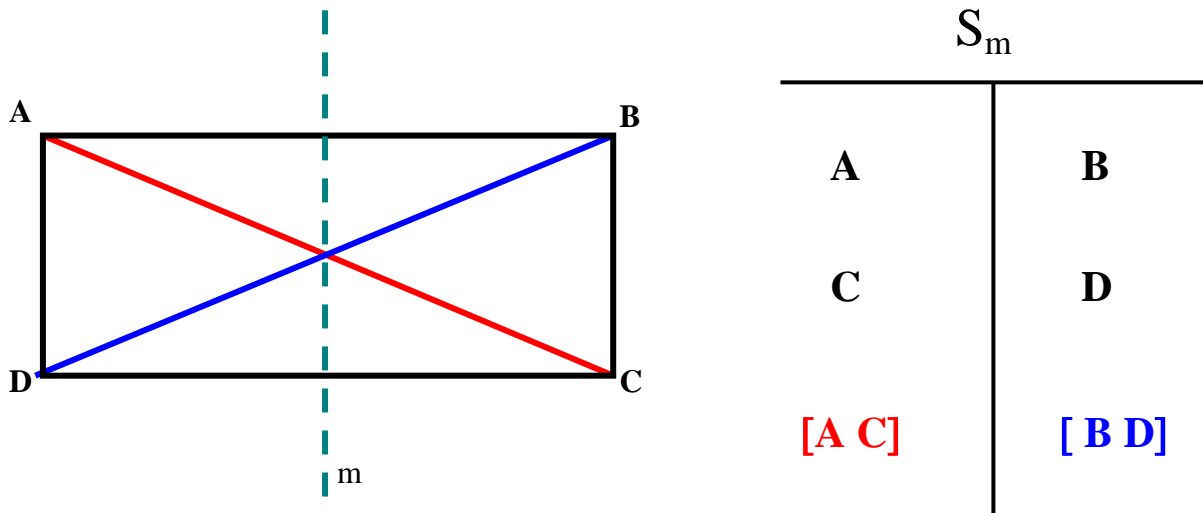
$$= \delta (O B) + \delta (D O)$$

$$= \delta (B D)$$

C Q F D

Version correcte

1.



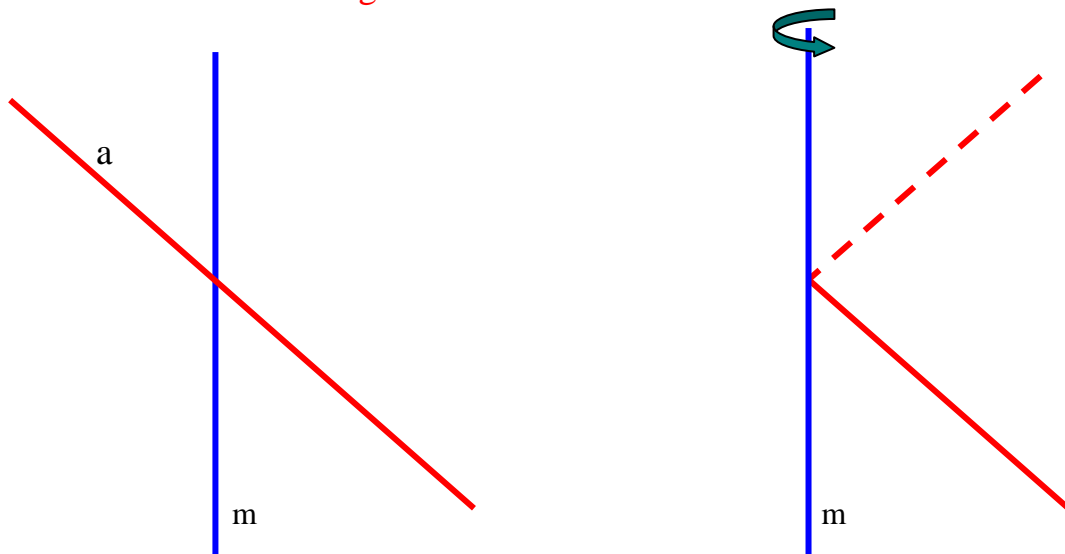
2.

$\delta(A C) = \delta(B D)$ car les symétries orthogonales conservent les distances.

C Q F D

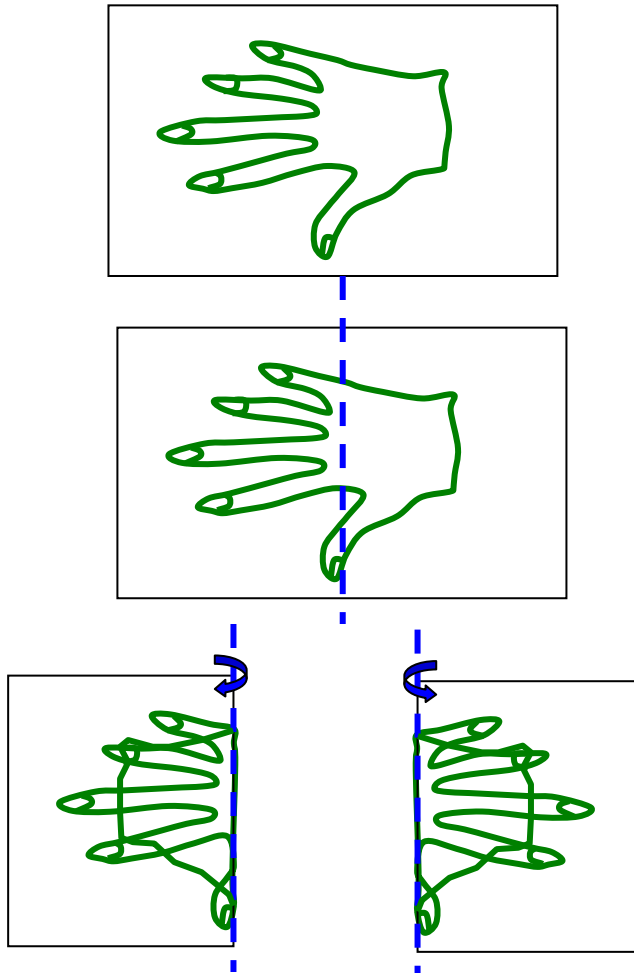
De plus:

- Par pliage, l'image d'une droite qui coupe l'axe de la symétrie orthogonale plane (ou la droite de points fixes) n'est pas une droite mais une ligne brisée.

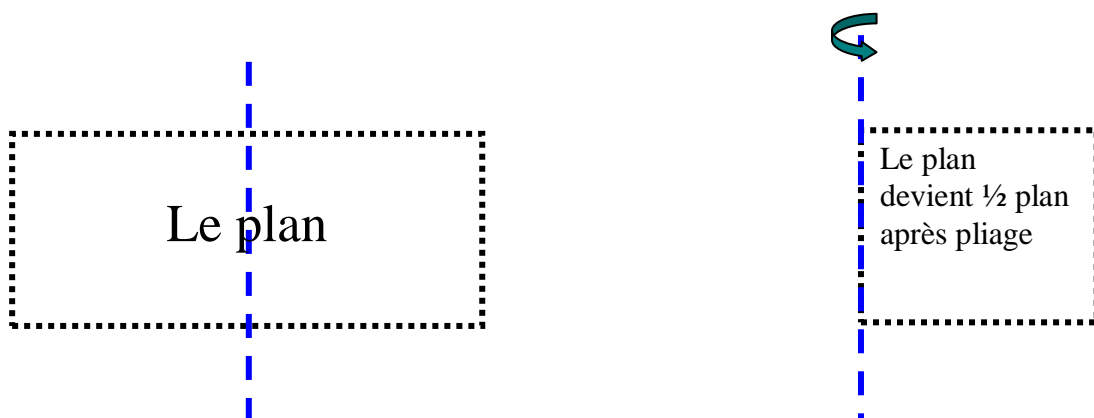


$S_m(a)$ devient une ligne brisée.

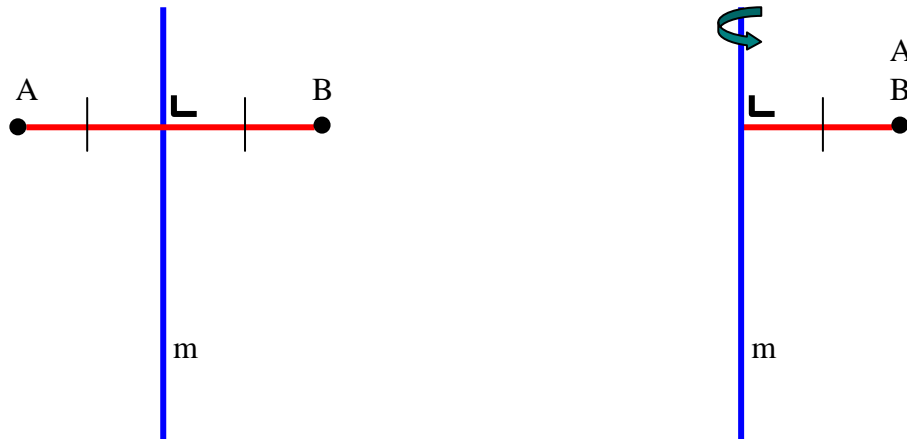
- Par "pliage", l'image d'une figure qui coupe l'axe de la symétrie orthogonale plane n'est pas une figure isométrique retournée de la figure de départ.



- Par "pliage", les deux demi-plans déterminés par l'axe de la symétrie orthogonale plane ne permutent pas.



- Par pliage, les distances ne sont pas conservées.



$$\delta (A B) = 4 \text{ cm}$$

Après pliage,

$$\delta (P1 (A), P1 (B)) = \delta (B , B) = 0 \text{ cm}$$

Ajoutons encore que:

- le pliage d'une feuille de papier est en contradiction avec le théorème qui relie les déplacements de l'espace qui conservent le plan et les isométries du plan (**théorème fondamental**).

Théorème fondamental

Les isométries d'un espace (E^n) sont déterminées par les déplacements de l'espace (E^{n+1}) de dimension directement supérieure qui "conservent" l'espace considéré.

Ou encore

Les isométries de (E^n) sont déterminées par les déplacements de (E^{n+1}) qui "conservent" (E^n)

Remarques:

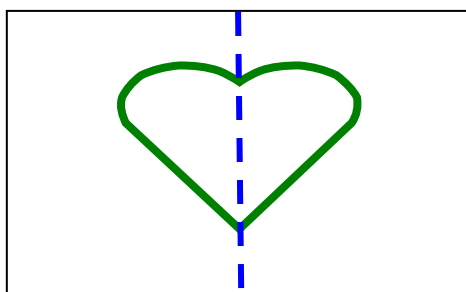
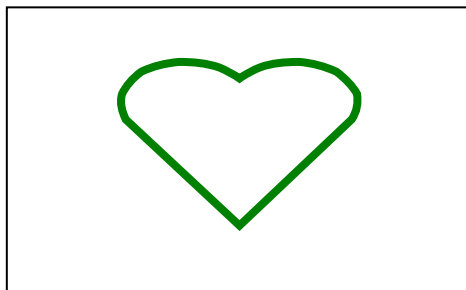
"déterminées" au sens où il s'agit de considérer la restriction du déplacement de (E^{n+1}) à l'espace (E^n).

"conservent" au sens où il s'agit de déplacements de (E^{n+1}) qui superposent l'espace (E^n) à lui-même.

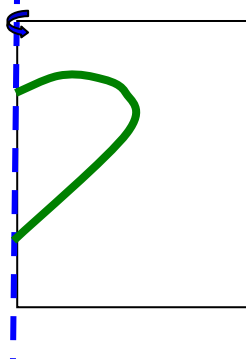
5. Pliage et axe de symétrie d'une figure F.

Rappel:

La droite "m" est un axe de symétrie de la figure "F" si et seulement si la symétrie orthogonale d'axe "m" superpose la figure F à elle-même.



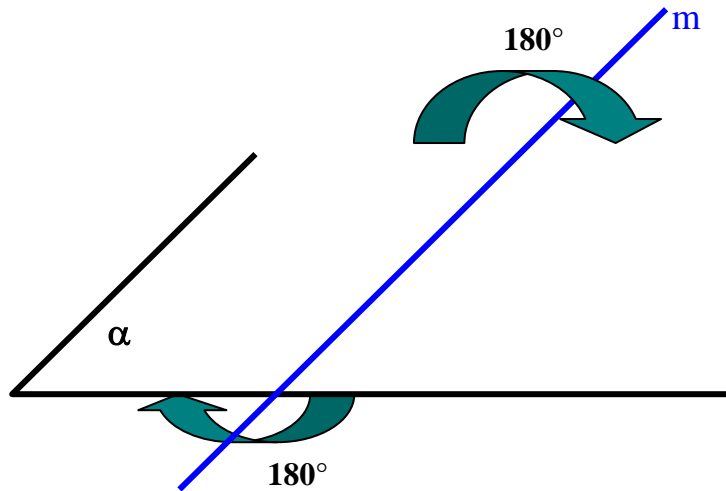
Le pliage ne montre pas que la figure se superpose à elle-même par retournement.



Le pliage montre que la figure F devient la moitié d'elle-même.

6. Modèles pour illustrer les symétries orthogonales planes.

Lors des premières approches des symétries orthogonales planes, une feuille transparente qui tourne de 180° dans l'espace autour d'une droite du plan (et qui se superpose au plan) est le meilleur modèle pour installer une bonne image mentale des symétries orthogonales planes.



En effet, après sa rotation de 180° dans l'espace, la feuille transparente montre directement que:

- l'image de toute droite est toujours une droite.
- l'image d'une figure est toujours une figure isométrique retournée.
- les deux demi-plans, déterminés par l'axe de la symétrie orthogonale plane, permutent.

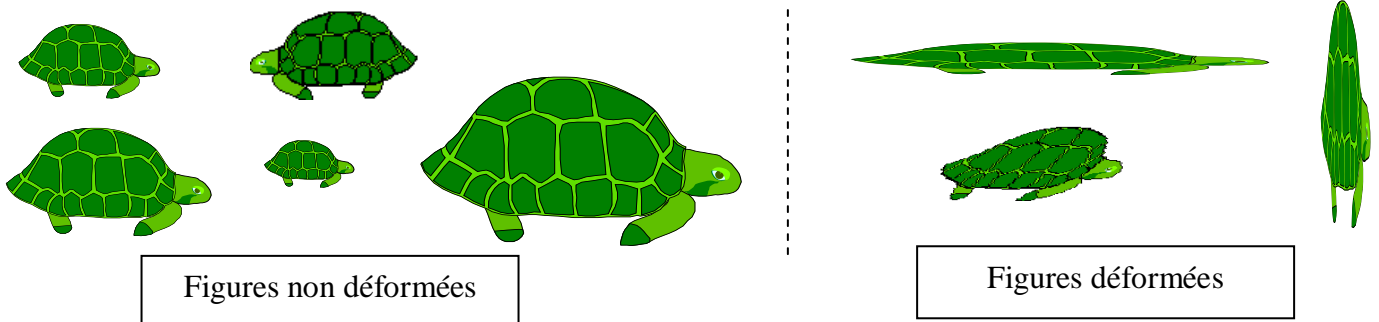
De plus, la rotation de 180° de la feuille transparente autour d'une droite du plan est en accord avec le théorème qui relie les déplacements de l'espace (qui conservent le plan) et les isométries du plan.

7. La genèse des symétries orthogonales planes.

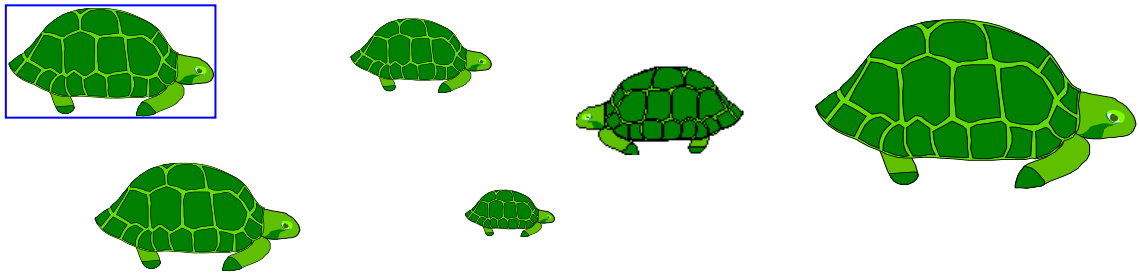
7.1. Introduction

Pour installer de bonnes images mentales des symétries orthogonales, le cheminement suivant a été expérimenté avec succès. Précisons que, avant d'aborder le concept "symétrie orthogonale" plane, les notions suivantes doivent nécessairement être maîtrisées:

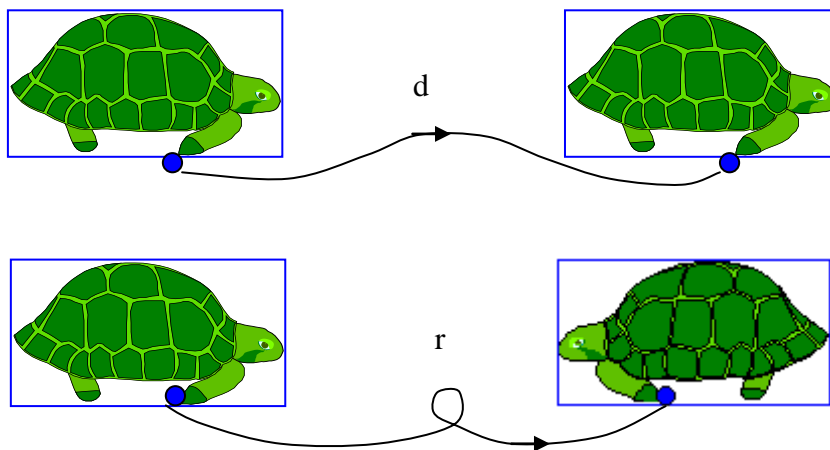
- figures déformées – figures non déformées (semblables)



- figures semblables (isométriques – réduites – agrandies)



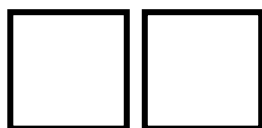
- figures isométriques déplacées - figures isométriques retournées



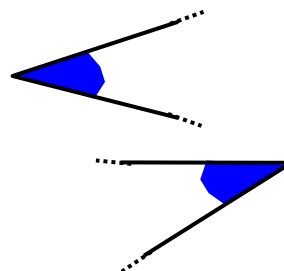
- notions conservées (ou inversées) par les déplacements et les retournements

Exemple:

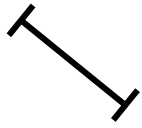
Préciser si, pour "passer" d'un dessin à l'autre, il est possible de le faire par un déplacement du transparent; par un retournement du transparent.



d	r



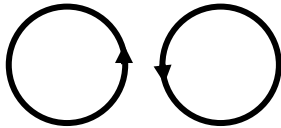
d	r



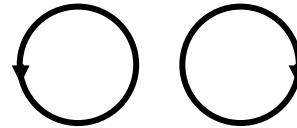
d	r



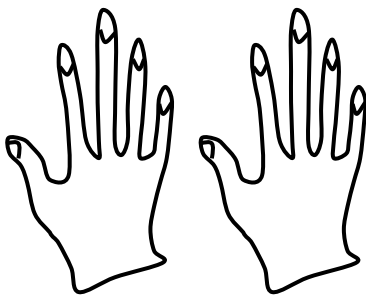
d	r



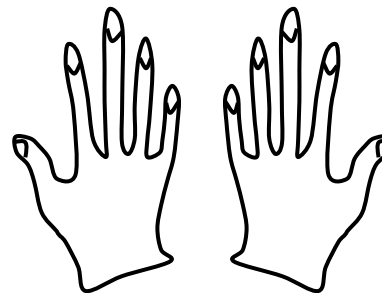
d	r



d	r



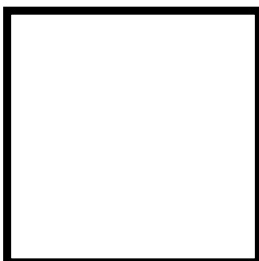
d	r



d	r

- figures superposables à elles-mêmes par déplacements et ou retournements (automorphismes de figures)

carré



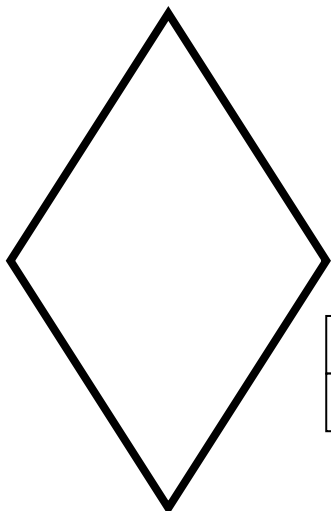
d	r

rectangle quelconque



d	r

losange quelconque



d	r

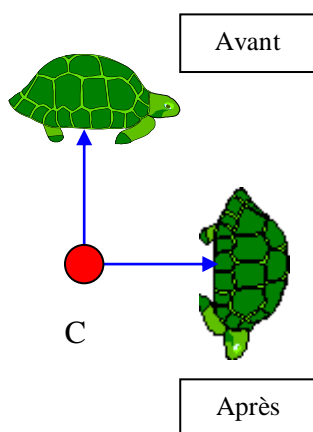
parallélogramme quelconque



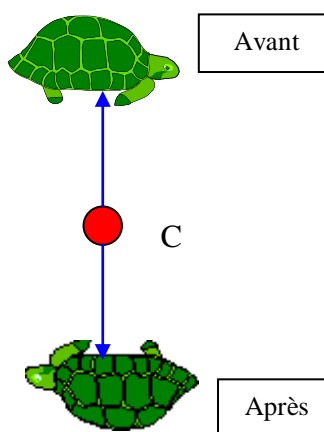
d	r

- rotations du plan

Rotations



**Symétries centrales
(= rotations de 180°)**



- symétries orthogonales planes .

Remarque:

Dans l'enseignement fondamental, la notion "consciente" de symétrie orthogonale apparaît à partir de 10 ans.

(voir les plans des matières sur le CD – 4^e année primaire).

7.2.Installation du concept "symétrie orthogonale plane"

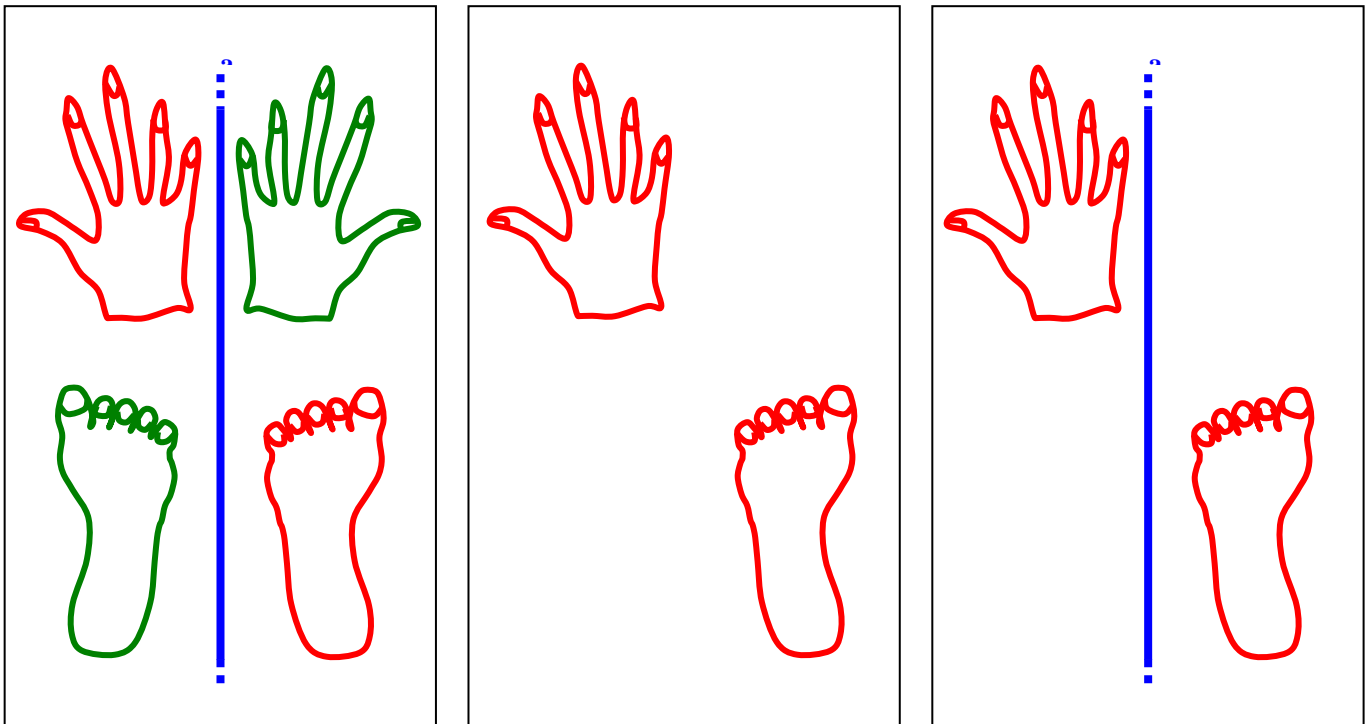
Cheminement suivi.

- 1. Découvrir qu'une symétrie orthogonale plane est un retournement (du plan) qui admet une droite de points fixes.

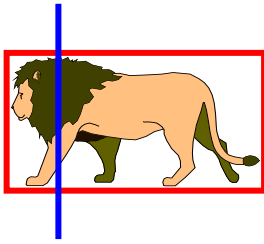
Exemple:

Comment "passer" de tout rouge à tout vert?

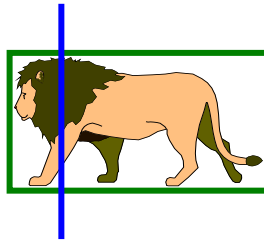
A reproduire sur feuilles transparentes



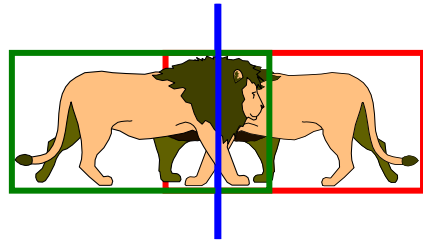
- 2. Rechercher, par manipulation de "figures transparentes", l'image obtenue après une symétrie orthogonale.



Modèle de départ

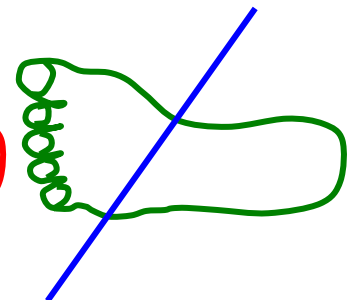
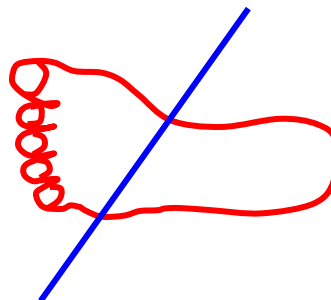
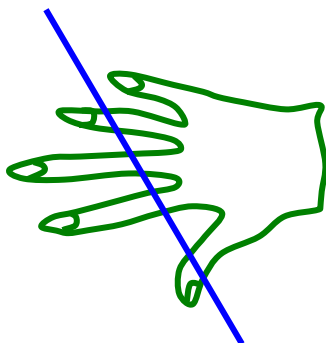
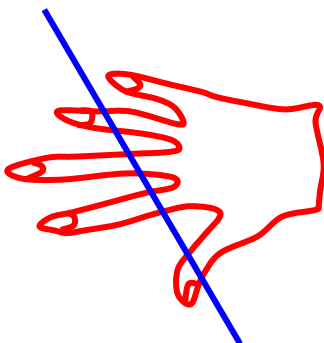
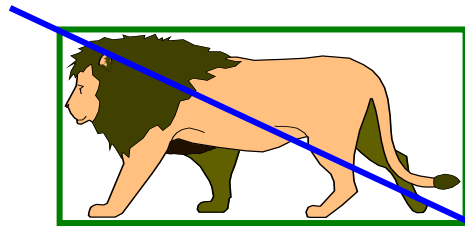
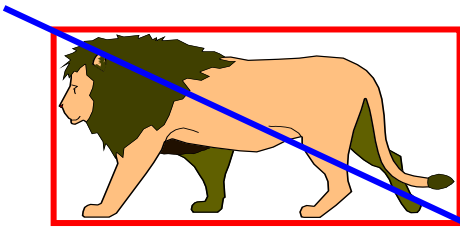
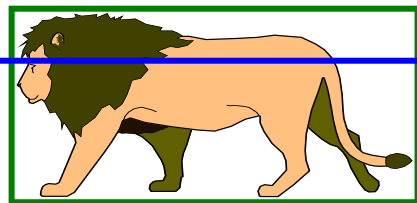
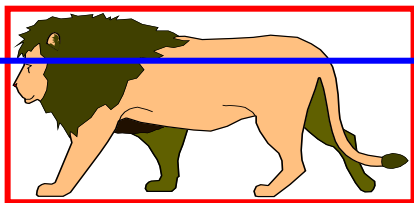


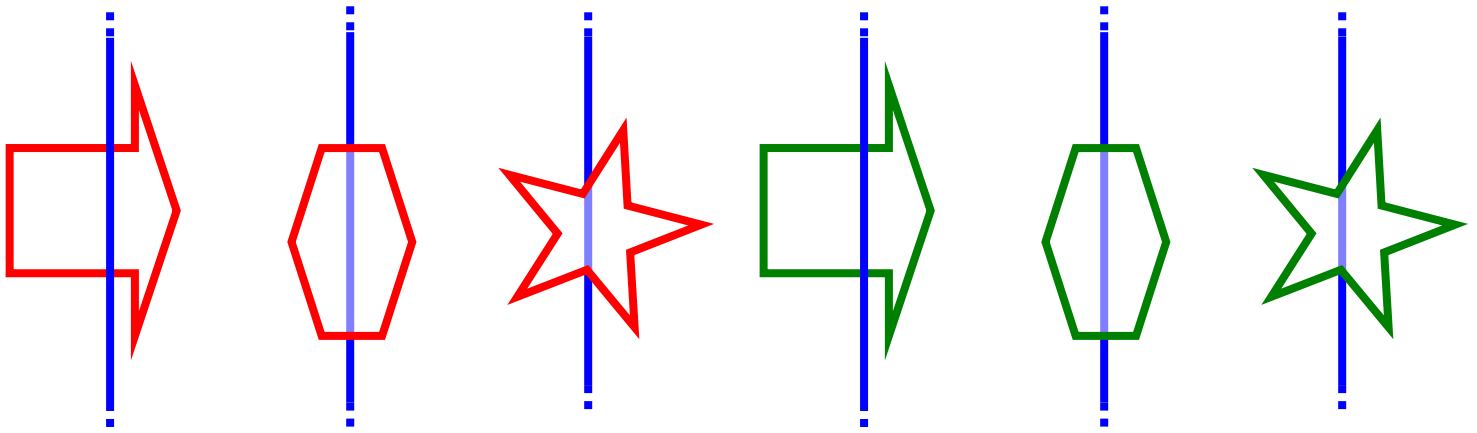
Modèle "vert" à "superposer au rouge" pour effectuer la symétrie orthogonale d'axe bleu.



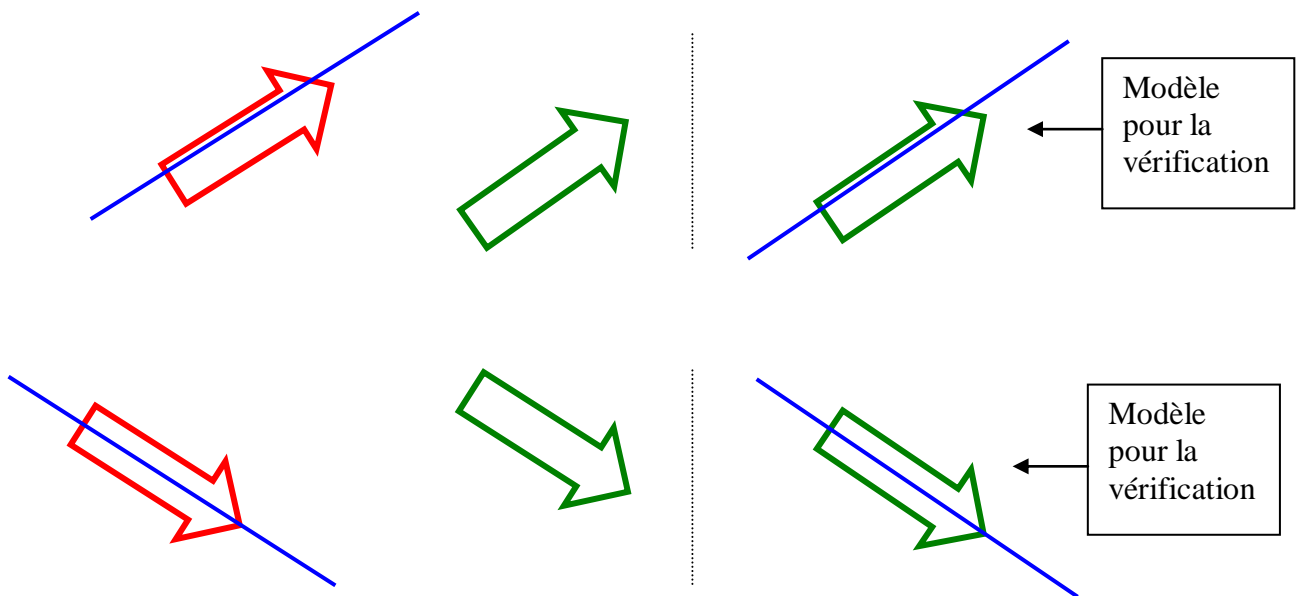
Résultat de la symétrie orthogonale d'axe bleu.

Autres modèles



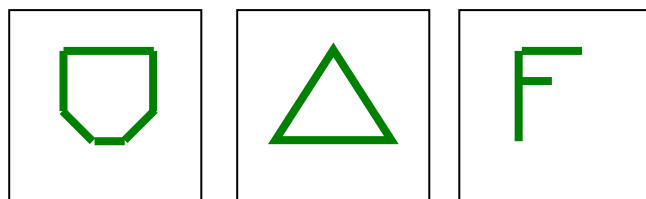


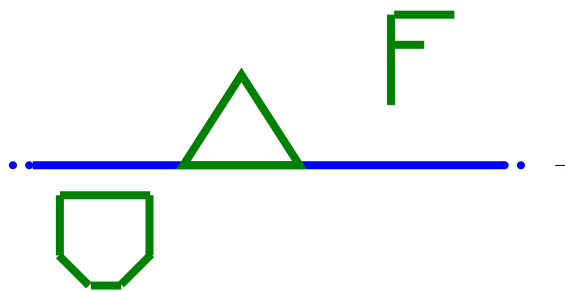
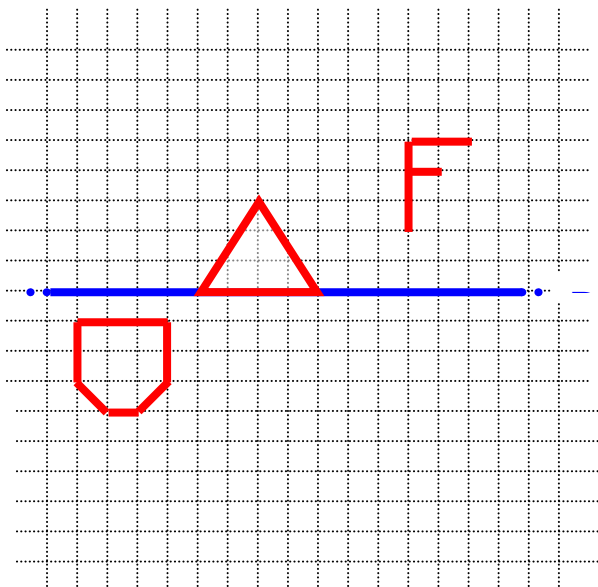
- 3. Positionner approximativement, l'image (sur transparent) d'une figure donnée après une symétrie orthogonale d'axe bleu imposé.



- 4. Sur un quadrillage, positionner approximativement l'image (sur transparent) d'une figure donnée après une symétrie orthogonale d'axe bleu imposé et découvrir la règle: "perpendiculaires et mêmes distances".

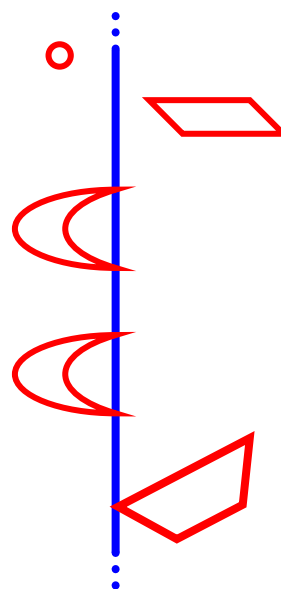
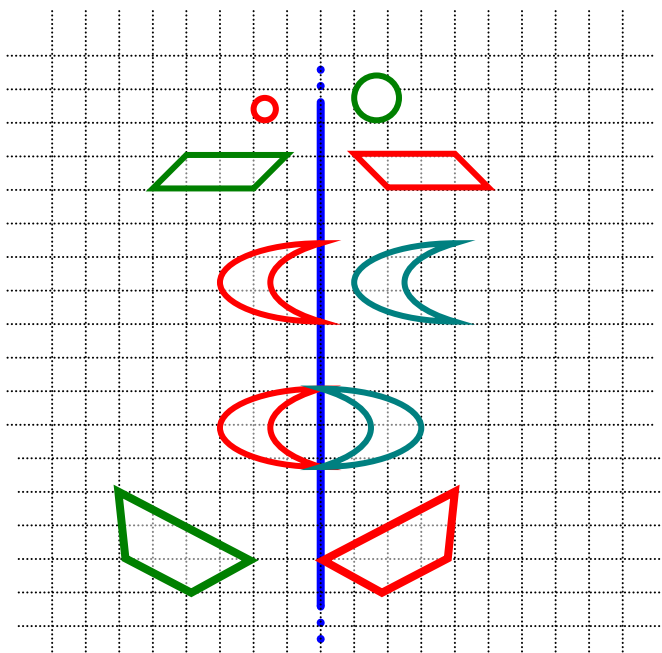
Exemples:





Modèle, sur transparent, pour la vérification

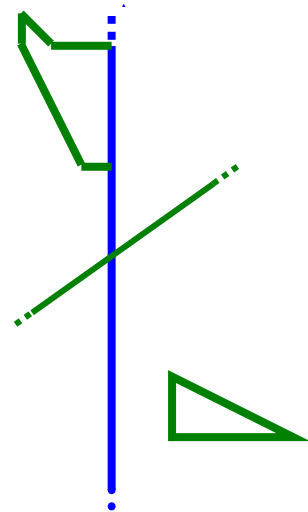
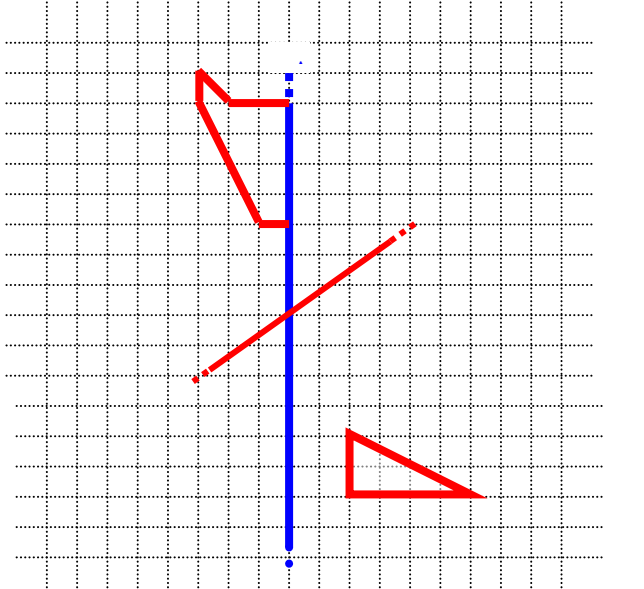
- 5. Repérer, à l'œil, les "bonnes" images correspondant à la symétrie orthogonale d'axe bleu donné.



Modèle, sur transparent, servant à la vérification

- 6. Sur un quadrillage, tracer aux instruments, l'image de figures après une symétrie orthogonale d'axe bleu donné.

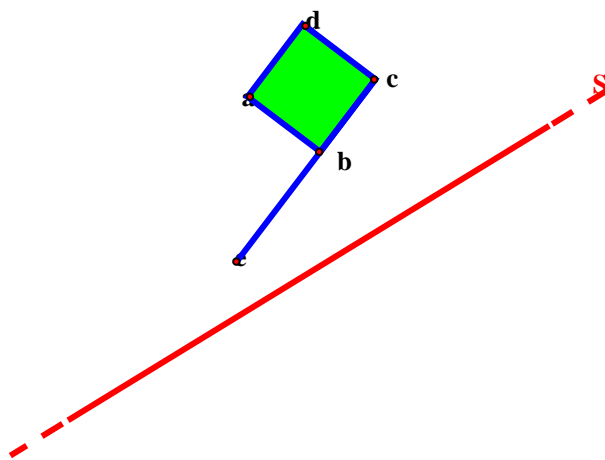
Exemples:



Modèle, sur transparent, servant à la vérification

- 7. Sur feuille blanche, tracer aux instruments, l'image de figures après une symétrie orthogonale d'axe S donné.

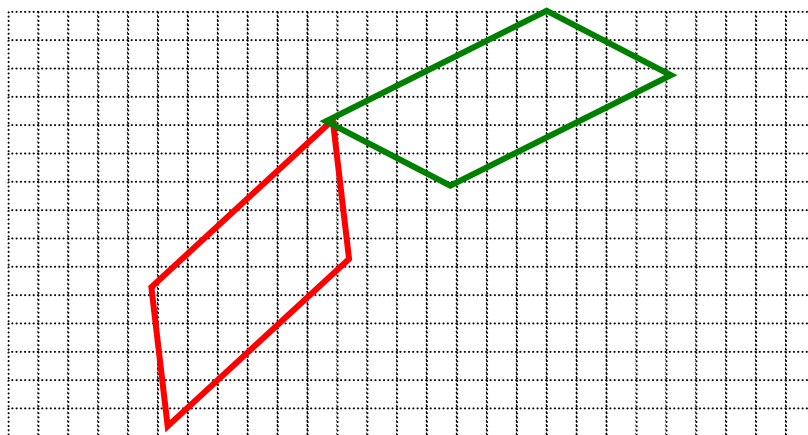
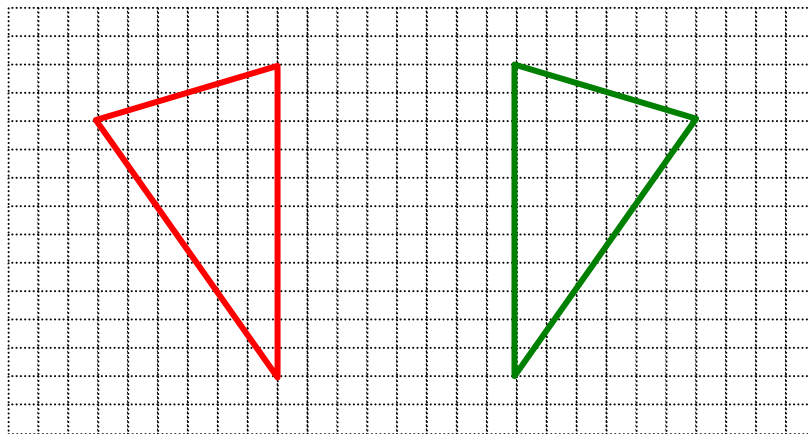
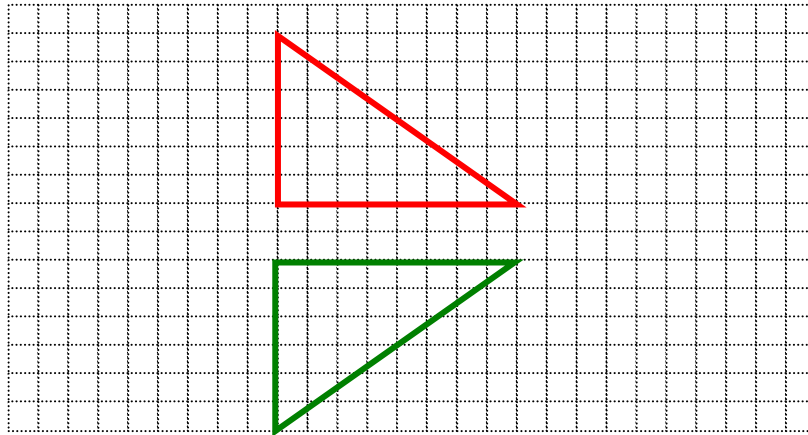
Exemple:



Reproduire le même modèle, sur transparent, pour la vérification.

- 8. Sur un quadrillage, rechercher comment positionner un axe bleu d'une symétrie orthogonale (tracé sur une feuille transparente) pour que les figures vertes soient les images des figures rouges, après la symétrie orthogonale d'axe bleu.

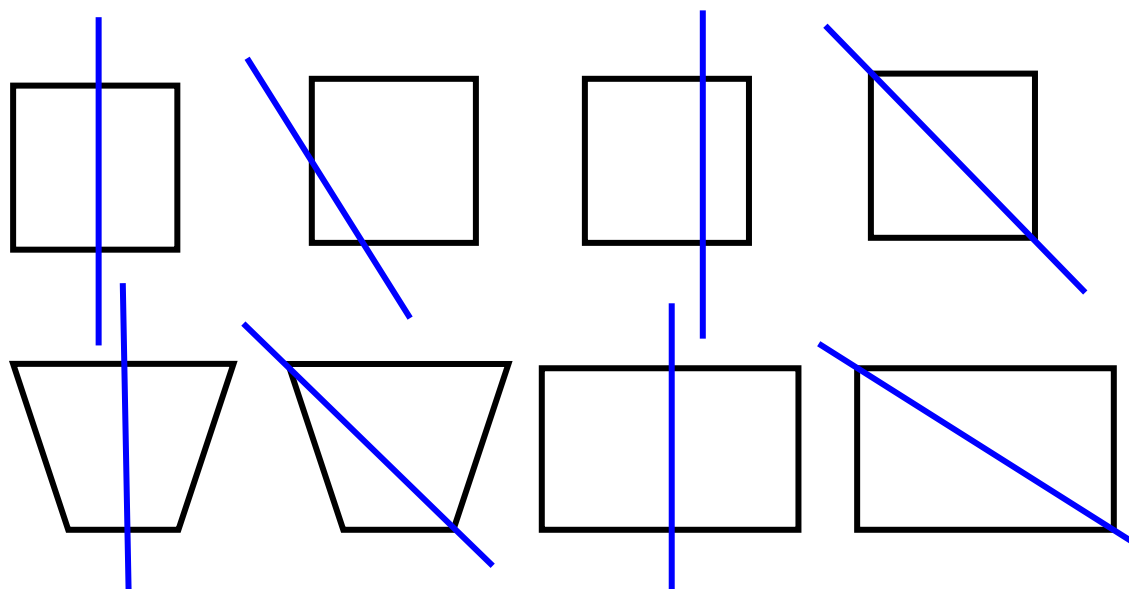
Exemples:



- 9. Rechercher les figures qui se superposent à elles-mêmes après la symétrie orthogonale plane d'axe bleu .
L'axe bleu de la symétrie orthogonale devient alors un axe de symétrie de ces figures.

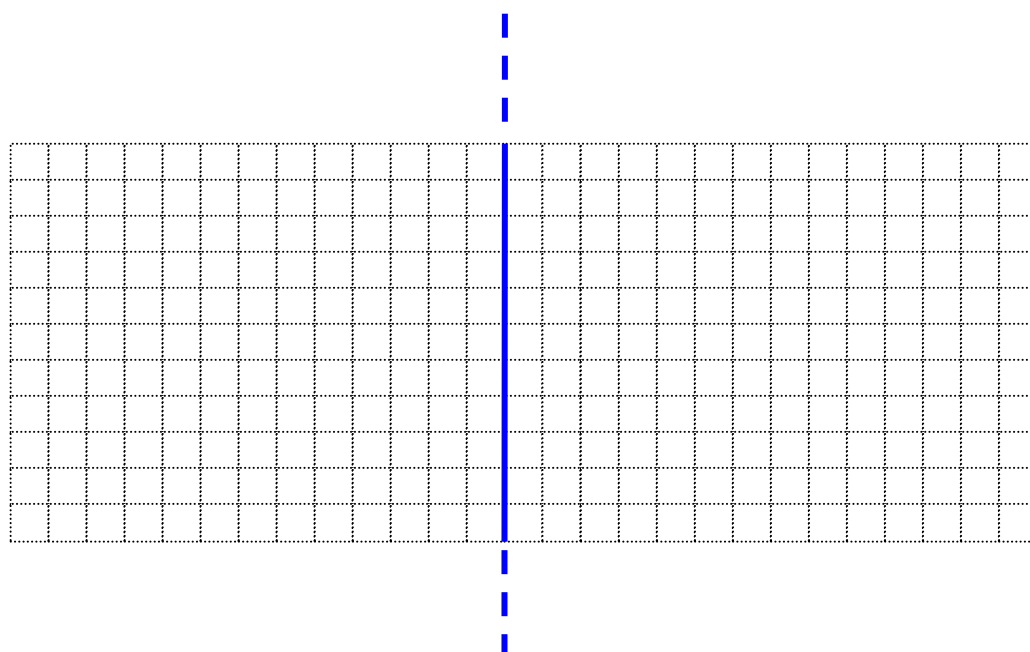
Exemples:

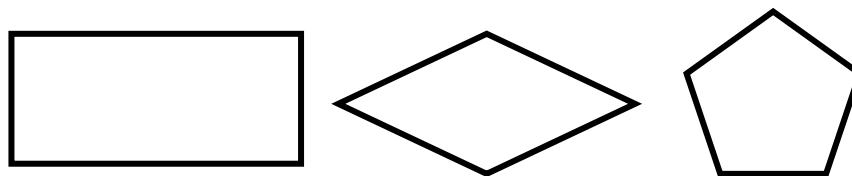
A reproduire deux fois sur feuilles transparentes



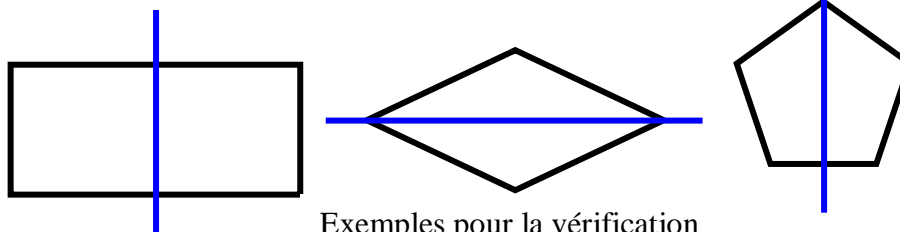
- 10. Sur un quadrillage, positionner les figures sur l'axe bleu de la symétrie orthogonale, pour que ces figures deviennent superposables à elles-mêmes (*pour que l'axe de la symétrie orthogonale devienne alors un axe de symétrie de ces figures*).

Exemples:





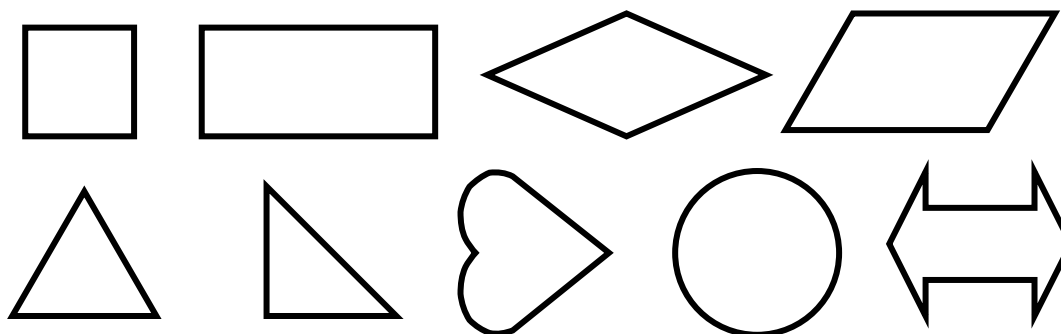
Exemples de figures transparentes



Exemples pour la vérification

- 11. Quand cela est possible, tracer une droite de points fixes d'une symétrie orthogonale qui permette aux figures de se "retourner" sur elles-mêmes (*rechercher les axes de symétrie des figures*)

Exemples:

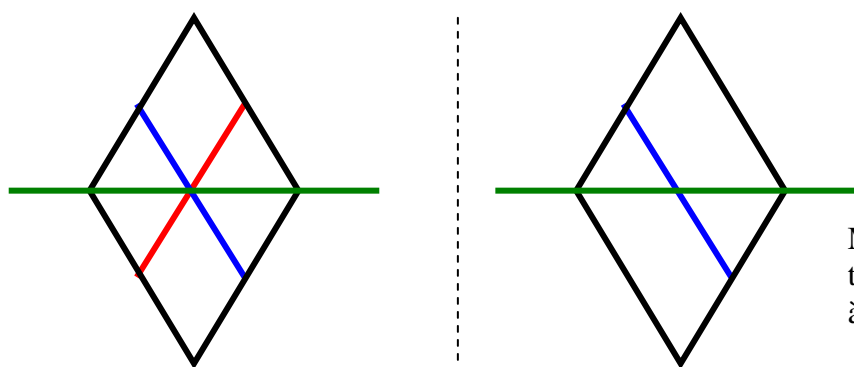


Remarque: Le parallélogramme quelconque ne possède pas d'axe de symétrie car il ne peut se superposer à lui-même par retournement .

- 12. Prouver ou "démontrer" par manipulation de "transparents" et à l'aide des symétries orthogonales planes.

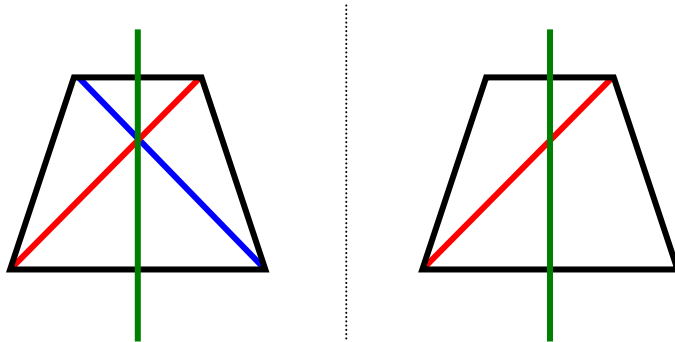
Exemples:

- Que devient la médiane bleue après la symétrie orthogonale d'axe vert? Que peut-on dire de ces deux médianes?



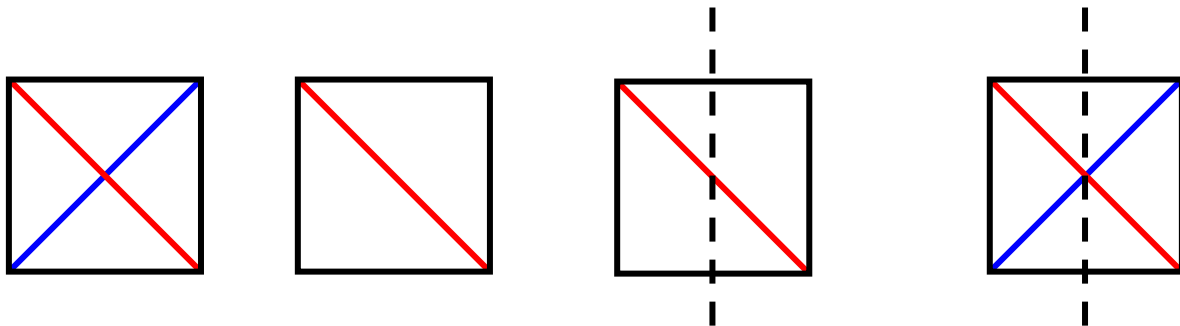
Modèle sur transparent servant à la démonstration

b) Que devient la diagonale rouge après la symétrie orthogonale d'axe vert ?
 Que peut-on dire de ces deux diagonales ?



Modèle à reproduire sur feuille transparente

c) Les diagonales d'un carré sont-elles de même longueur ?
 Prouve-le.



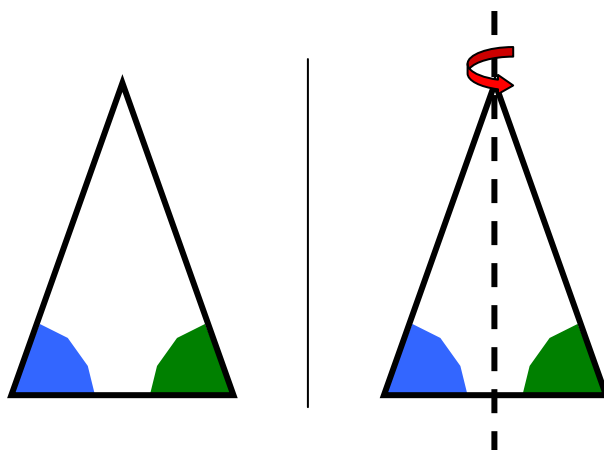
Modèle de départ

Modèle transparent servant à la recherche du "mouvement" qui superpose la diagonale rouge à la diagonale bleue.

Modèle servant à illustrer une symétrie orthogonale qui superpose la diagonale rouge à la diagonale bleue.

Modèle servant à « prouver » que la symétrie orthogonale permute les diagonales bleue et rouge.

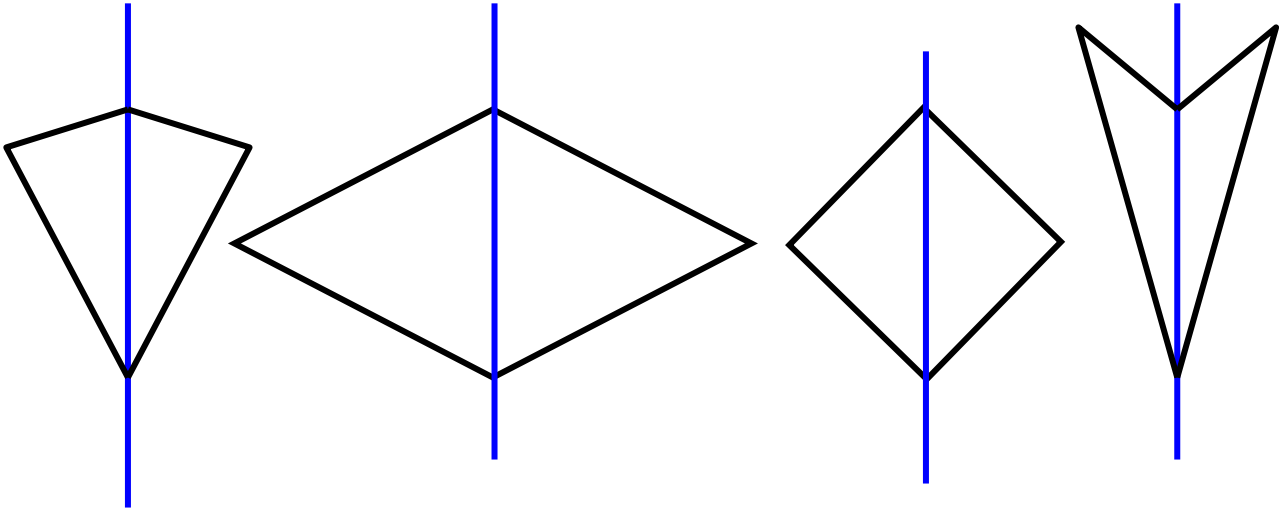
d) Dans le triangle isocèle justifier que l'angle vert et l'angle bleu sont de même amplitude .



Vérification à l'aide d'un dessin sur feuille transparente.

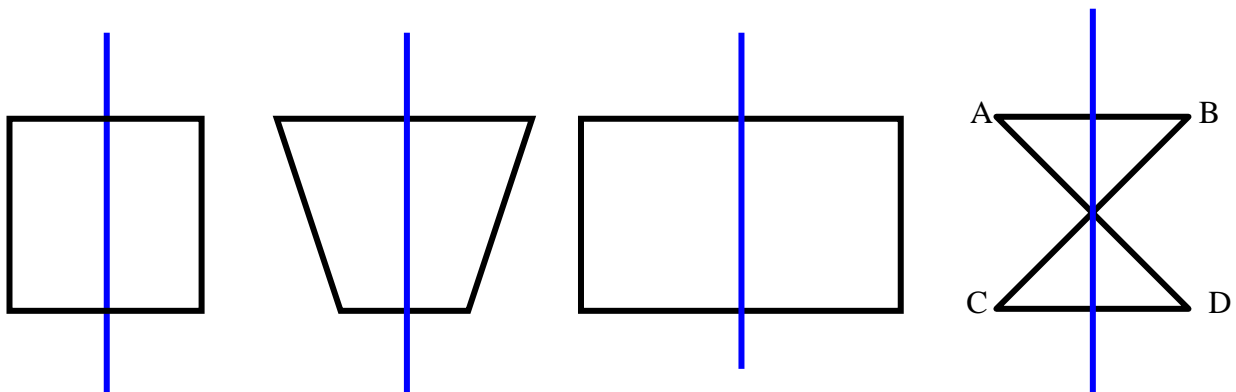
e) Rechercher les différents types de quadrilatères (A B C D) admettant une diagonale comme axe de symétrie.

Exemples de solutions:



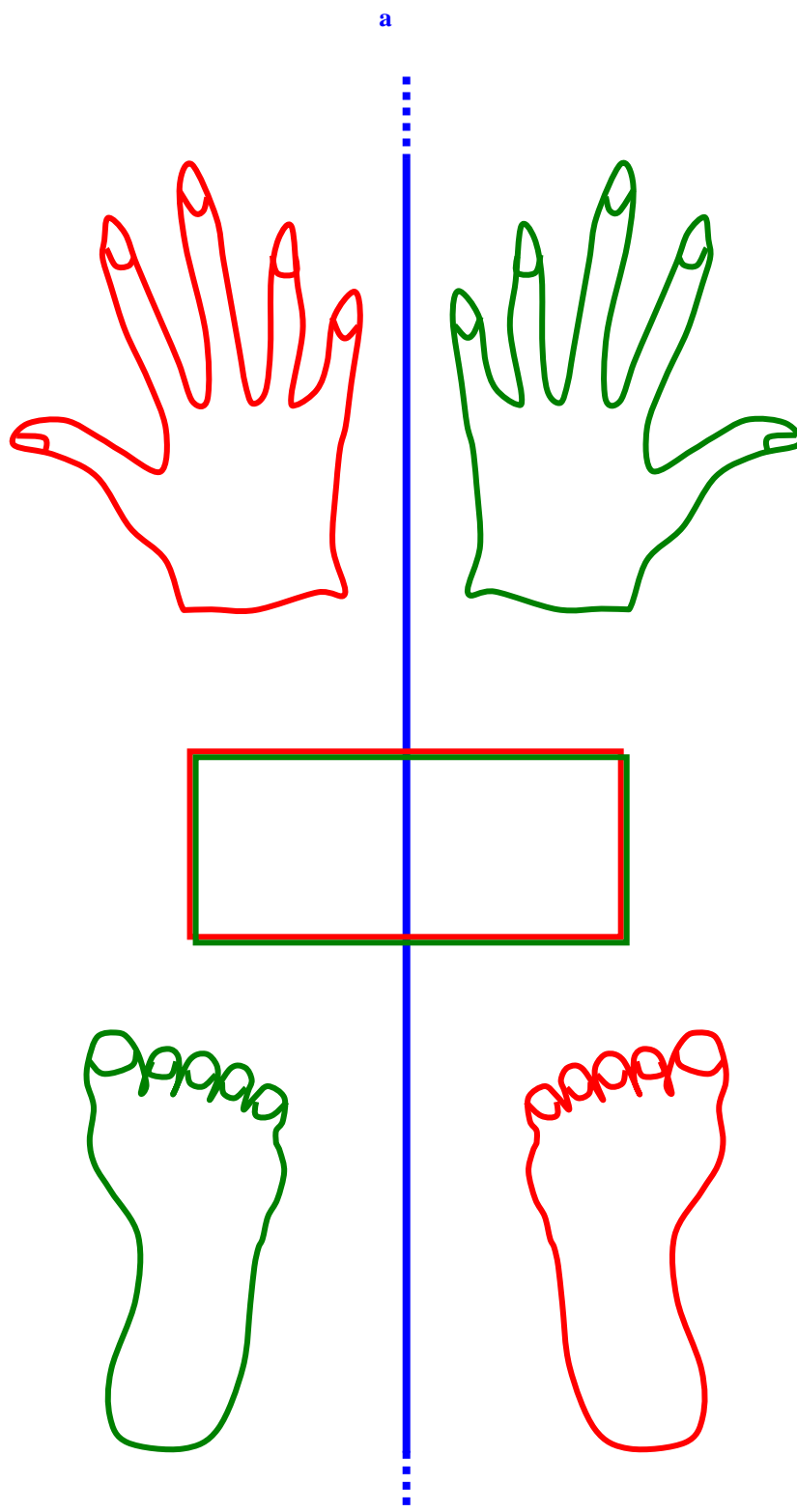
f) Rechercher les différents types de quadrilatères (A B C D) admettant une médiane comme axe de symétrie.

Exemples de solutions:

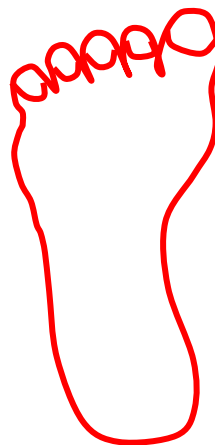


Matériel en grandeur réelle à reproduire sur feuilles transparentes
pour l'initiation aux symétries orthogonales

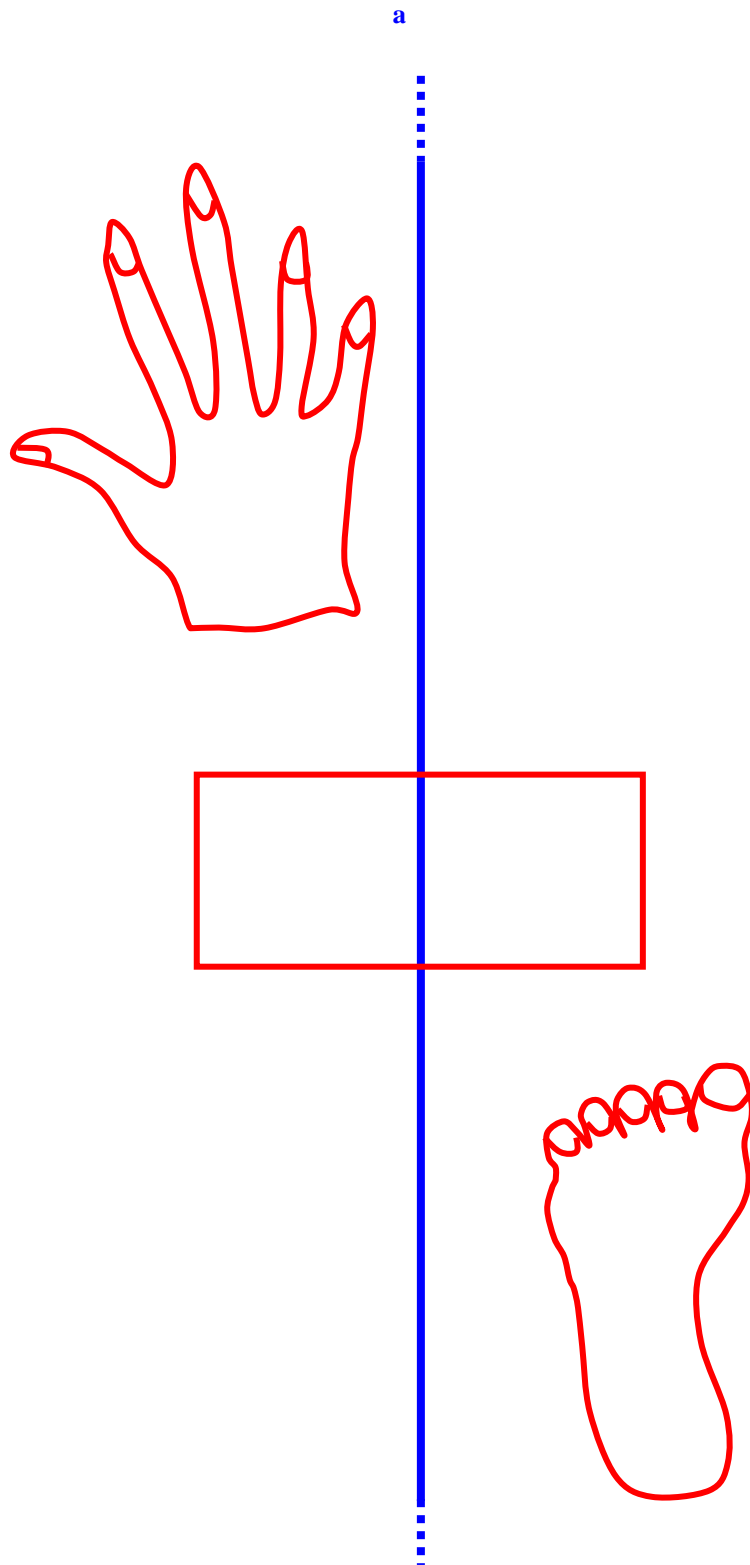
Comment "passer" **de tout rouge à tout vert** ?



A reproduire sur feuille transparente.

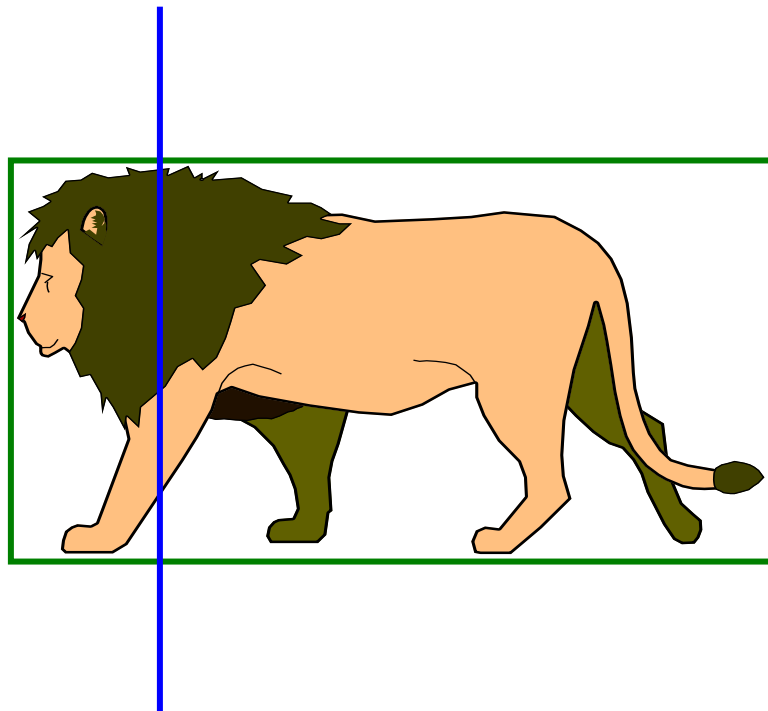
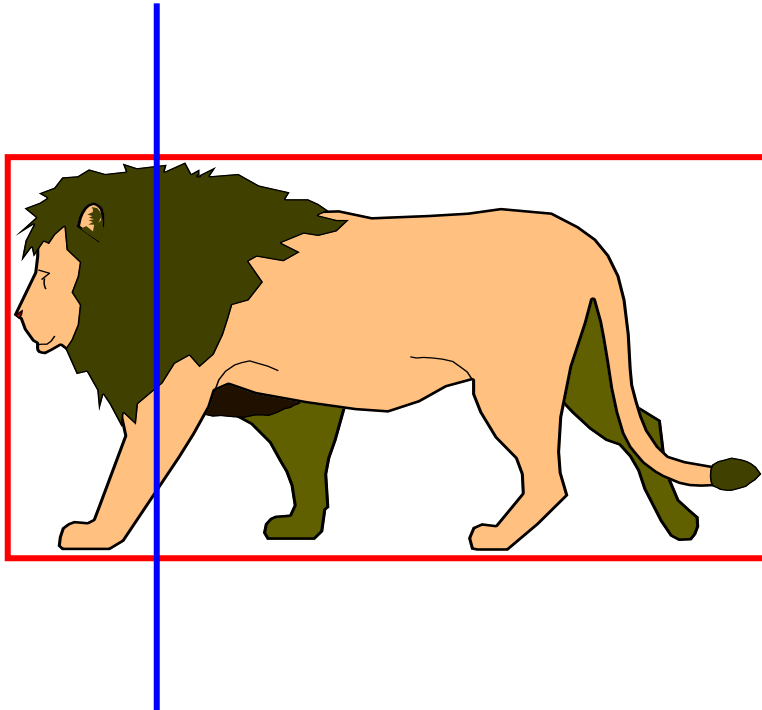


A reproduire sur feuille transparente.



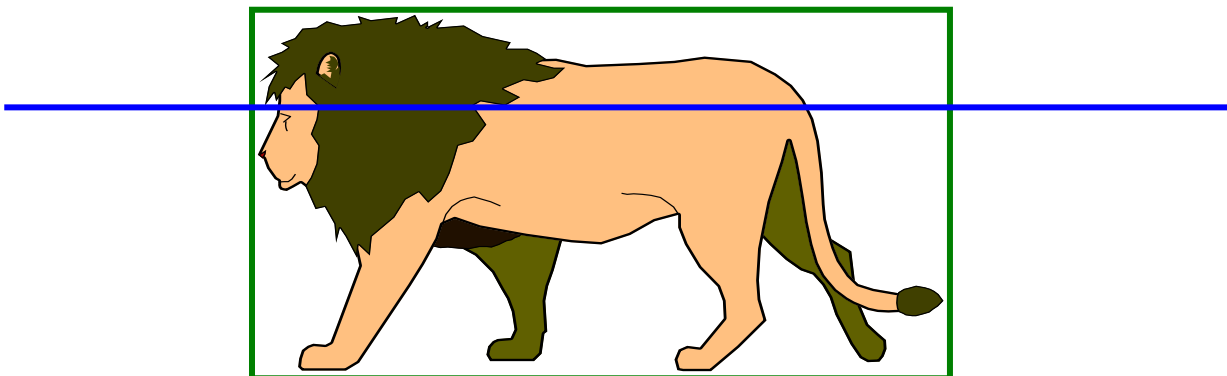
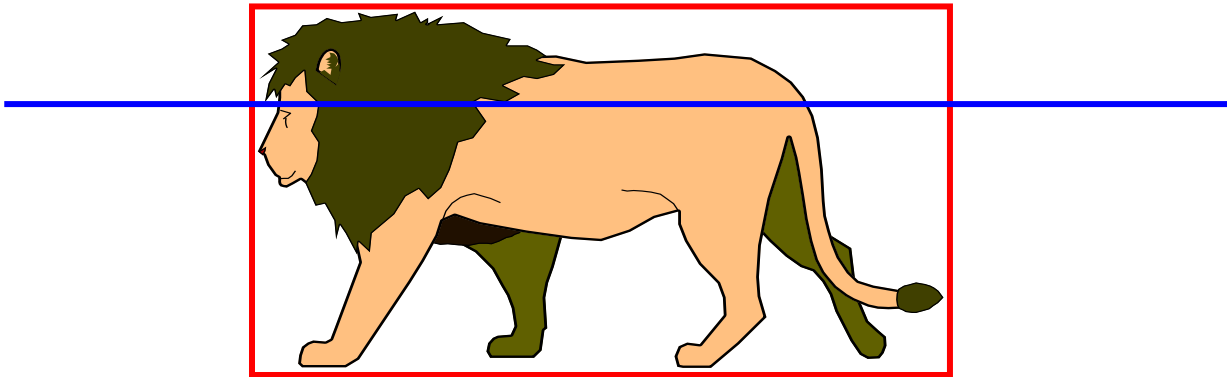
A reproduire sur feuille transparente

A l'aide des "dessins rouge et vert", rechercher l'image obtenue après une symétrie orthogonale d'axe bleu ?



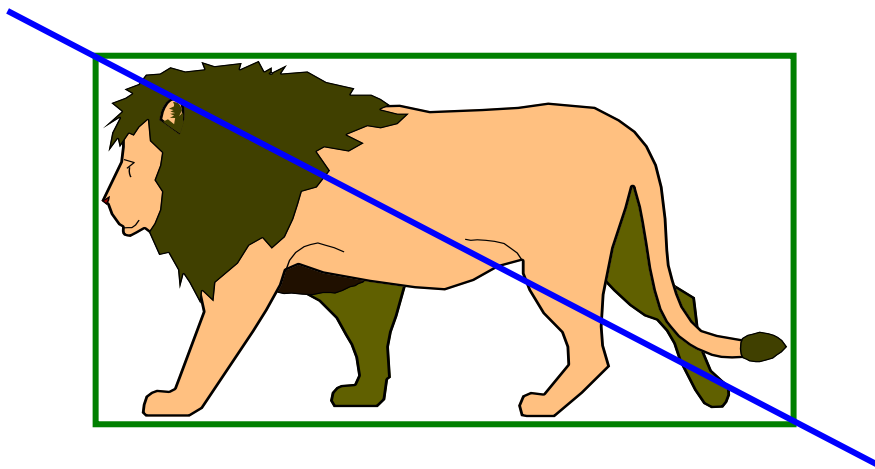
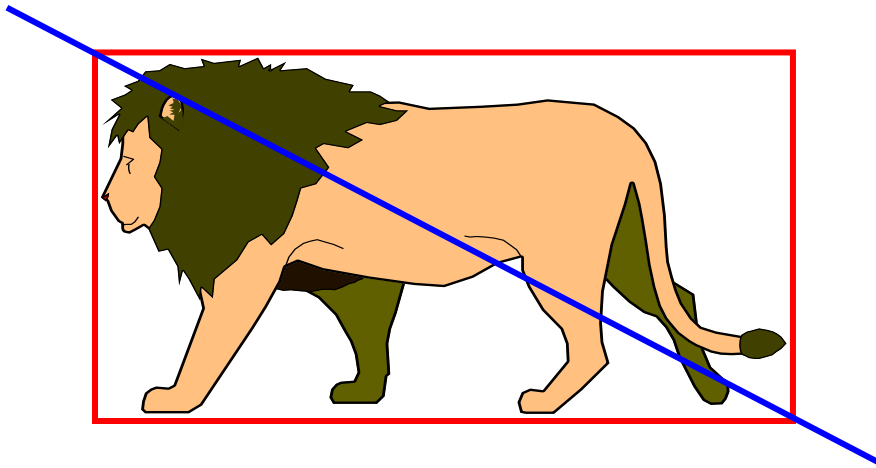
A reproduire sur feuille transparente.

A l'aide des "dessins rouge et vert", rechercher l'image obtenue après une symétrie orthogonale d'axe bleu ?



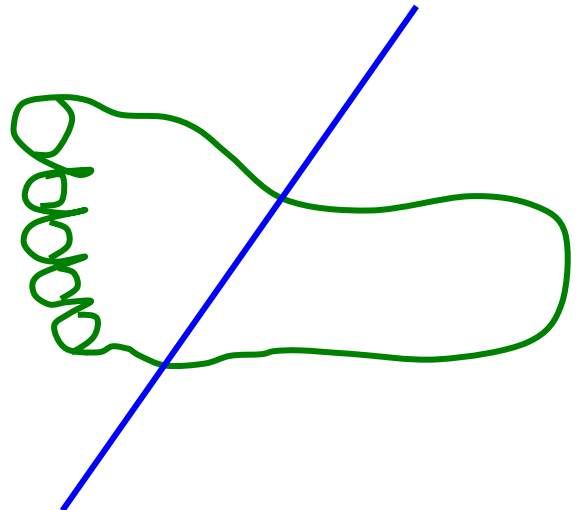
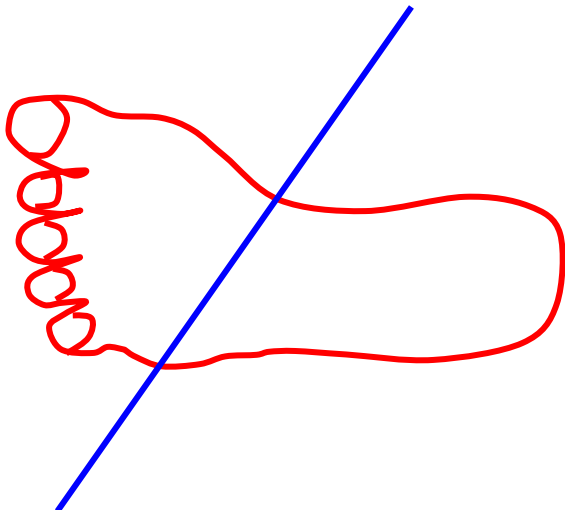
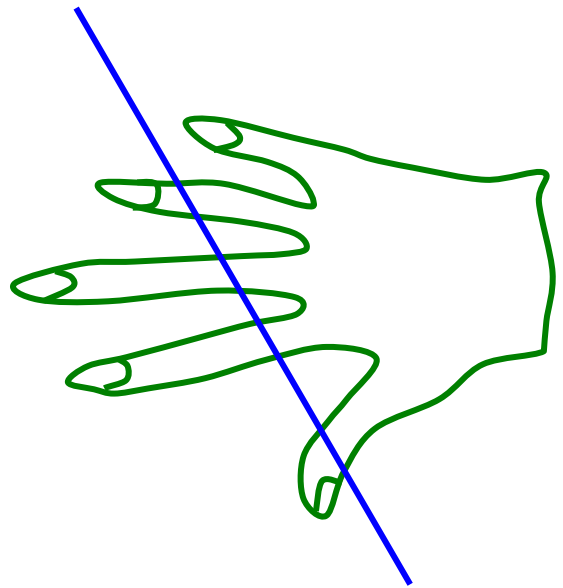
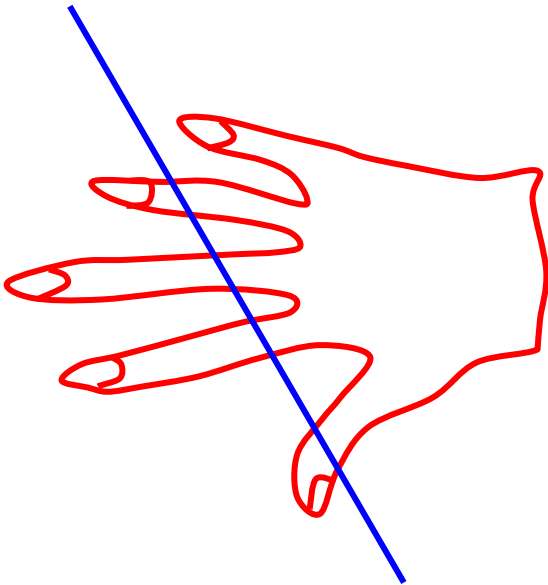
A reproduire sur feuille transparente.

A l'aide des "dessins rouge et vert", rechercher l'image obtenue après une symétrie orthogonale d'axe bleu ?



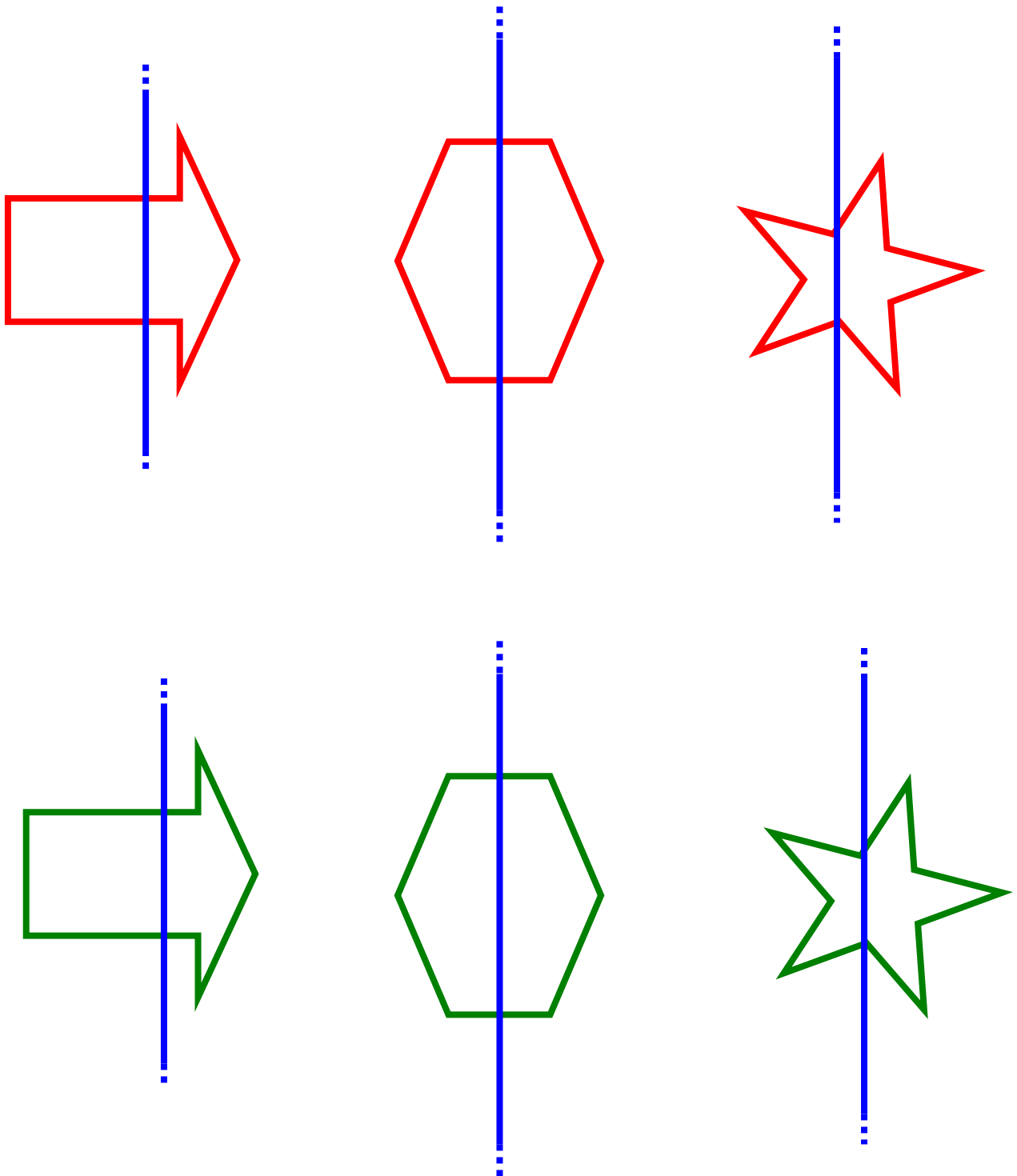
A reproduire sur feuille transparente.

A l'aide des "dessins rouge et vert", rechercher l'image obtenue après une symétrie orthogonale d'axe bleu ?



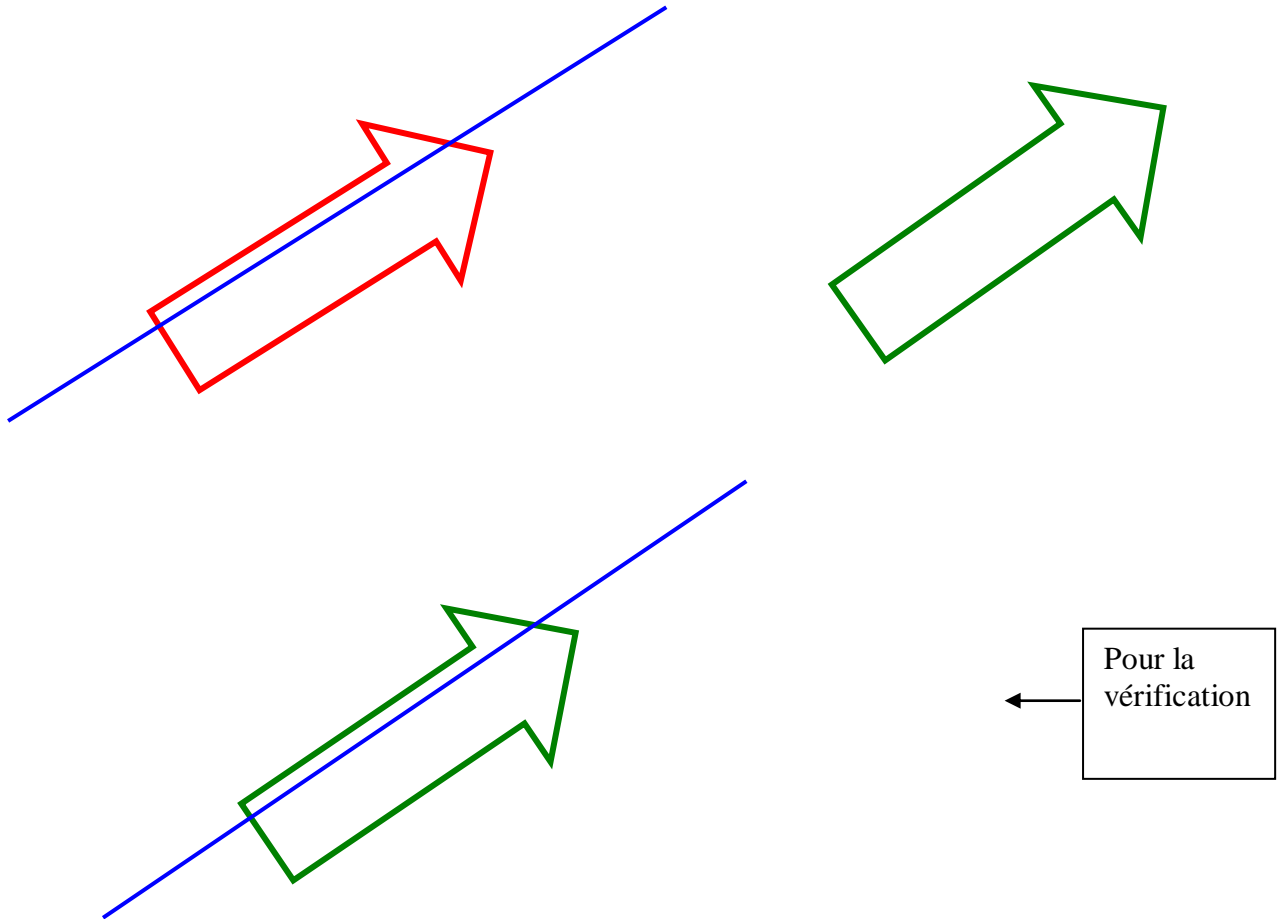
A reproduire sur feuille transparente.

A l'aide des "dessins rouge et vert", rechercher l'image obtenue après une symétrie orthogonale d'axe bleu ?



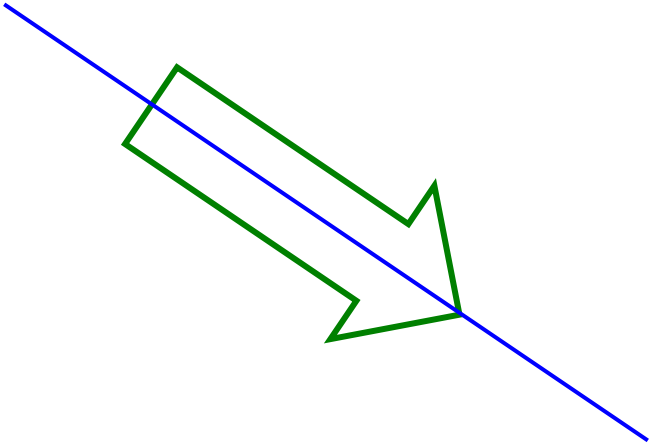
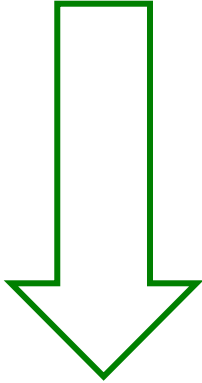
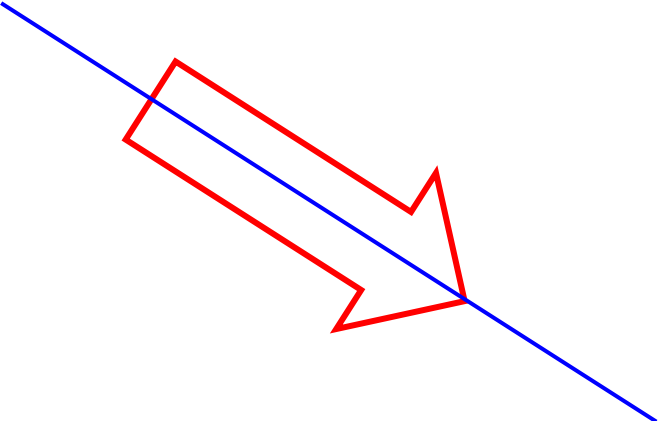
A reproduire sur feuille transparente.

Partant des dessins rouges, positionner approximativement les dessins verts (sans axe tracé) après une symétrie orthogonale d'axe bleu ? – vérifier



A reproduire sur feuille transparente.

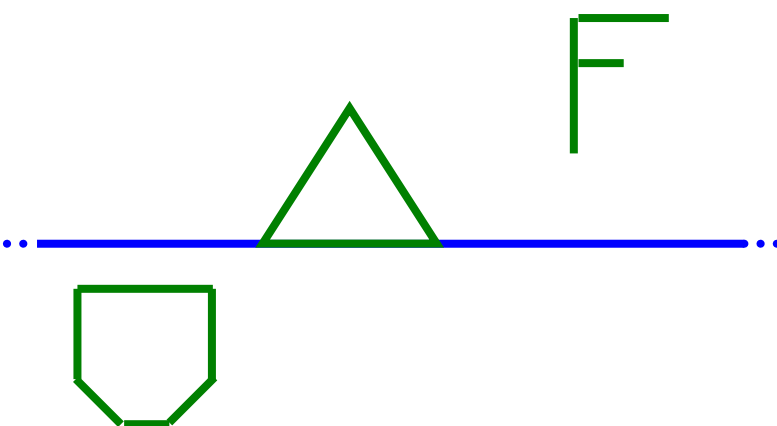
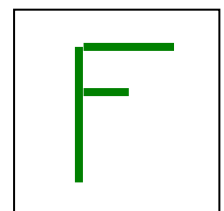
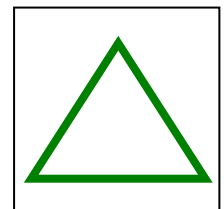
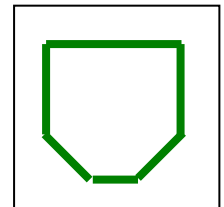
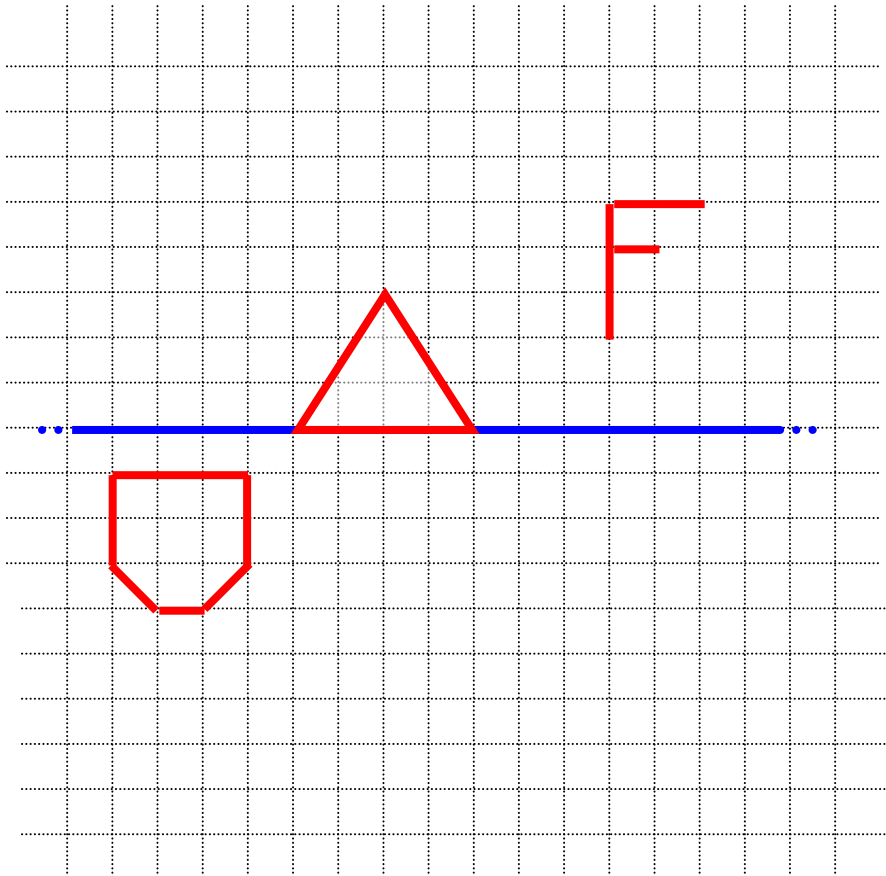
Partant des dessins rouges, positionner approximativement les dessins verts (sans axe tracé) après une symétrie orthogonale d'axe bleu ? – vérifier



← Pour la vérification

A reproduire sur feuille transparente.

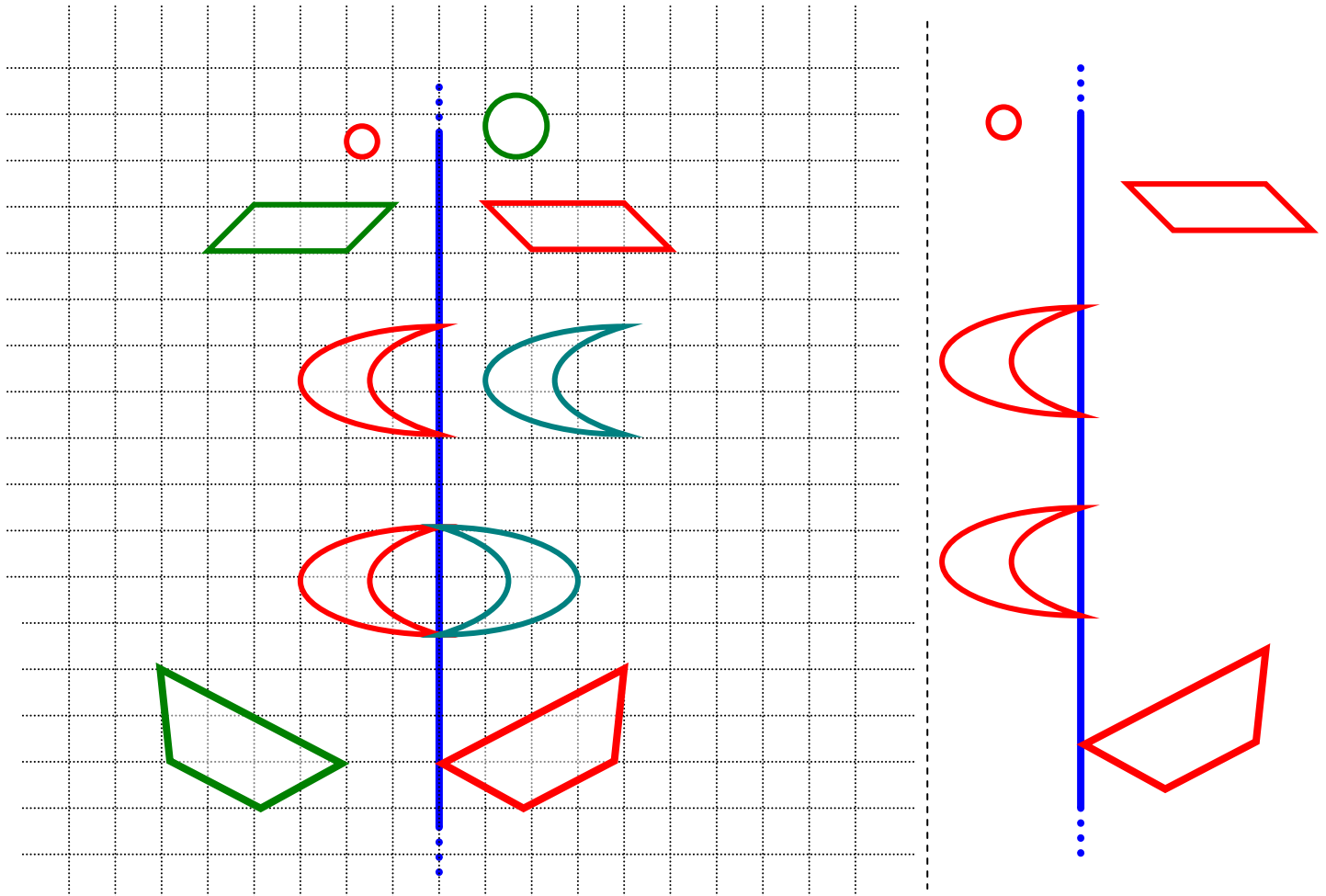
Positionner les dessins verts (prédécoupés le long des cadres), sur le quadrillage, après une symétrie orthogonale d'axe bleu et découvrir la règle: "perpendiculaires et mêmes distances" - vérifier.



Pour la vérification

A reproduire sur feuille transparente.

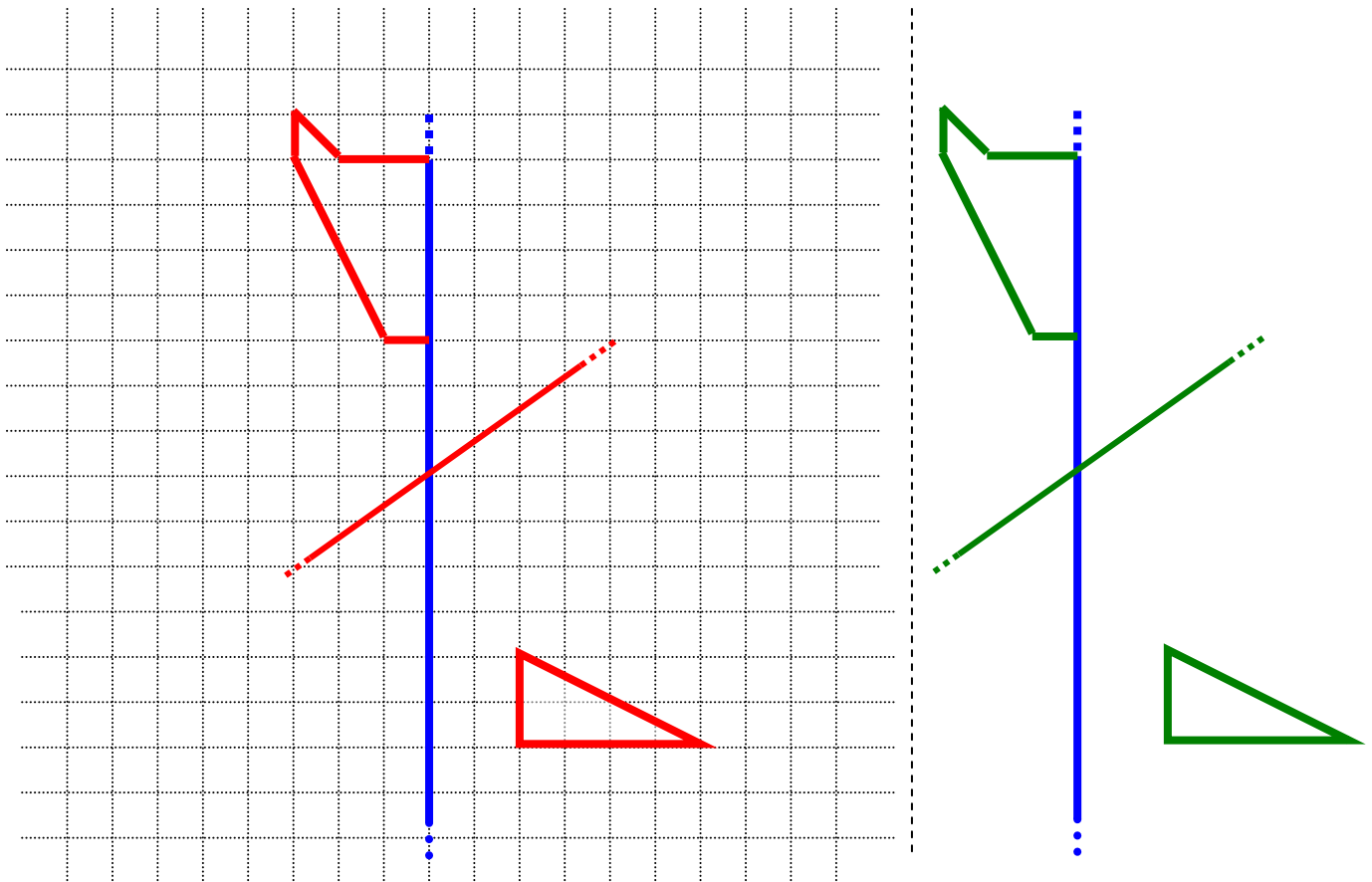
Repérer, à l'œil, les "bonnes" images correspondant à la symétrie orthogonale d'axe bleu donné - vérifier.



Pour la vérification

A reproduire sur feuille transparente.

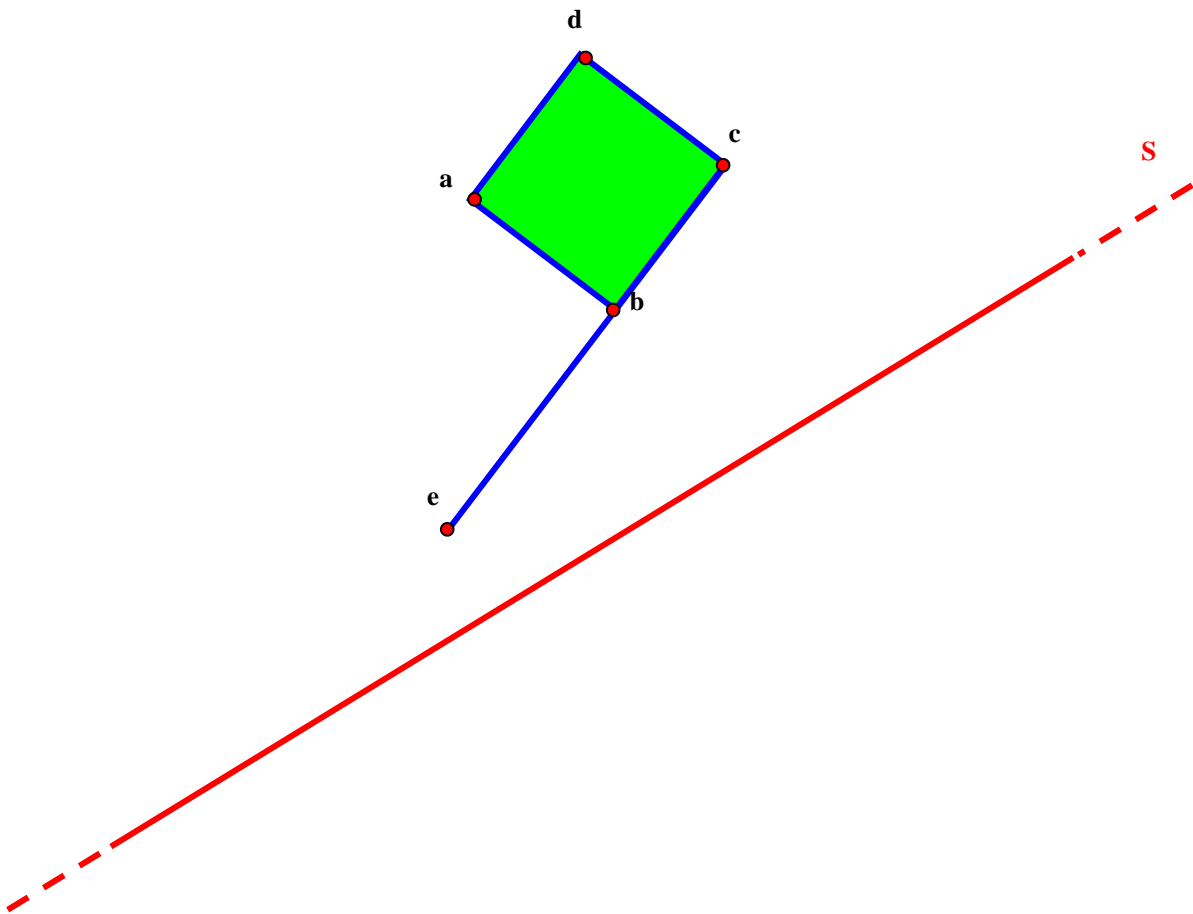
Sur le quadrillage, tracer aux instruments, l'image de figures après une symétrie orthogonale d'axe bleu donné - vérifier.



Pour la
vérification

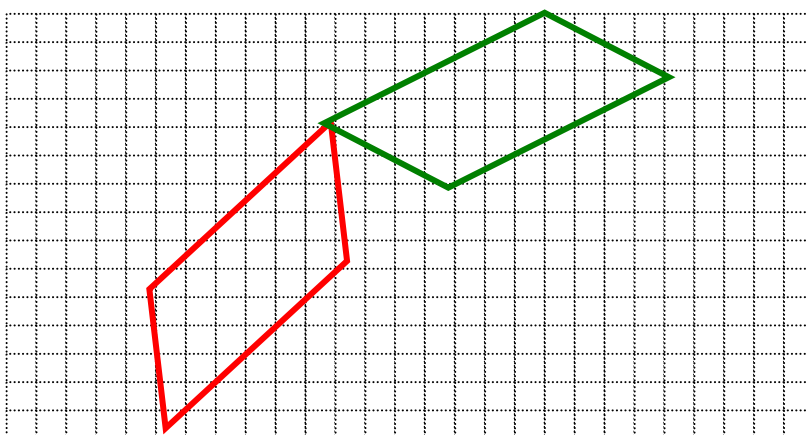
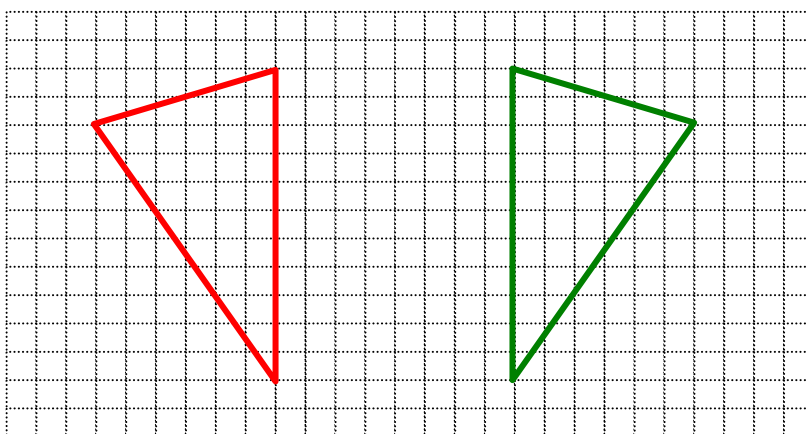
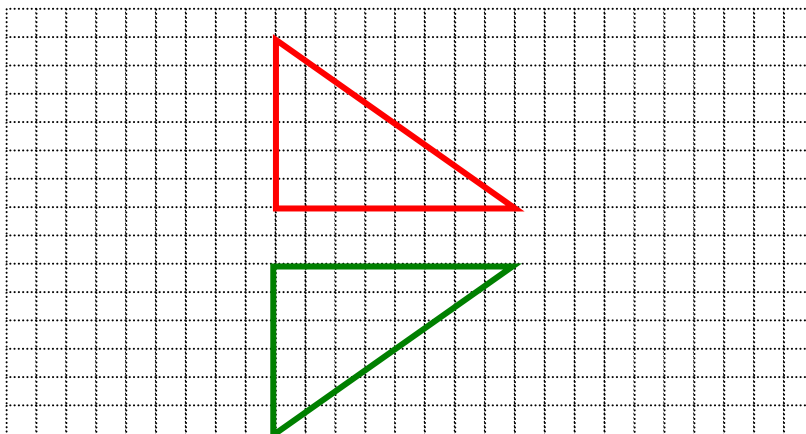
A reproduire sur feuille transparente pour la vérification.

Sur feuille blanche, tracer aux instruments, l'image de figures après une symétrie orthogonale d'axe S donné.



A reproduire sur feuille transparente.

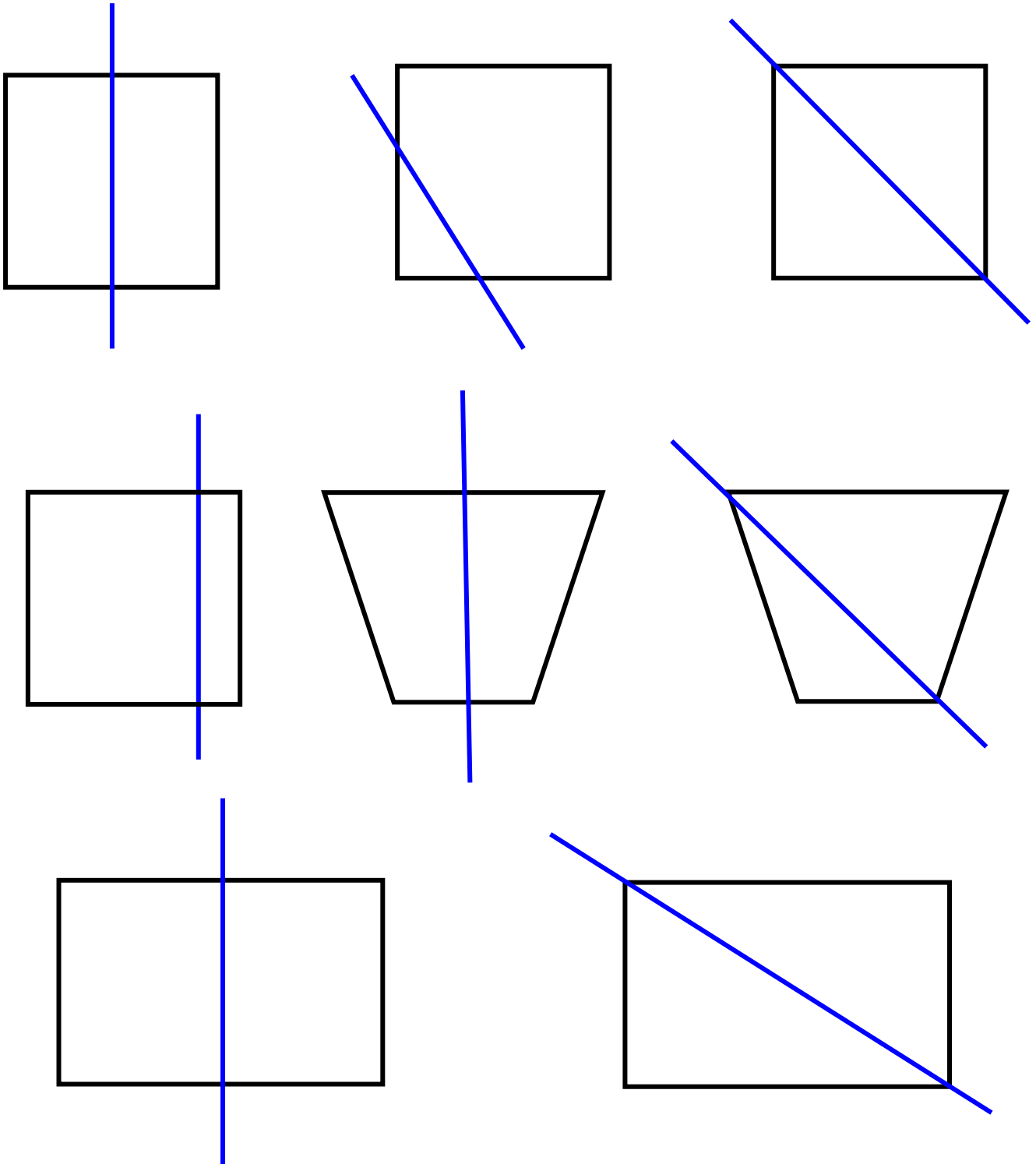
Sur les quadrillages, rechercher comment positionner un axe bleu d'une symétrie orthogonale (tracé sur une feuille transparente) pour que les figures vertes soient les images des figures rouges, après la symétrie orthogonale d'axe bleu.



A reproduire **deux fois** sur feuilles transparentes.

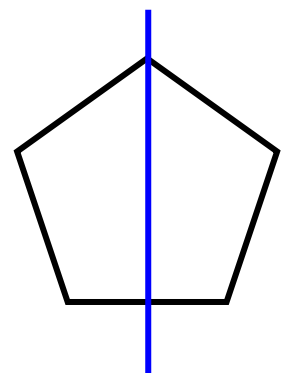
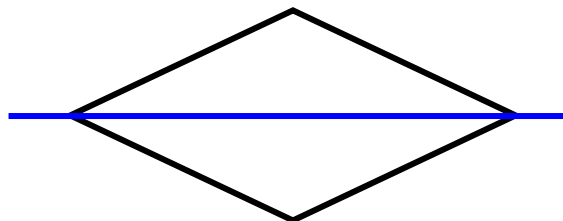
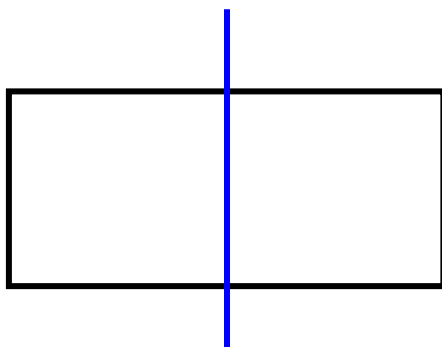
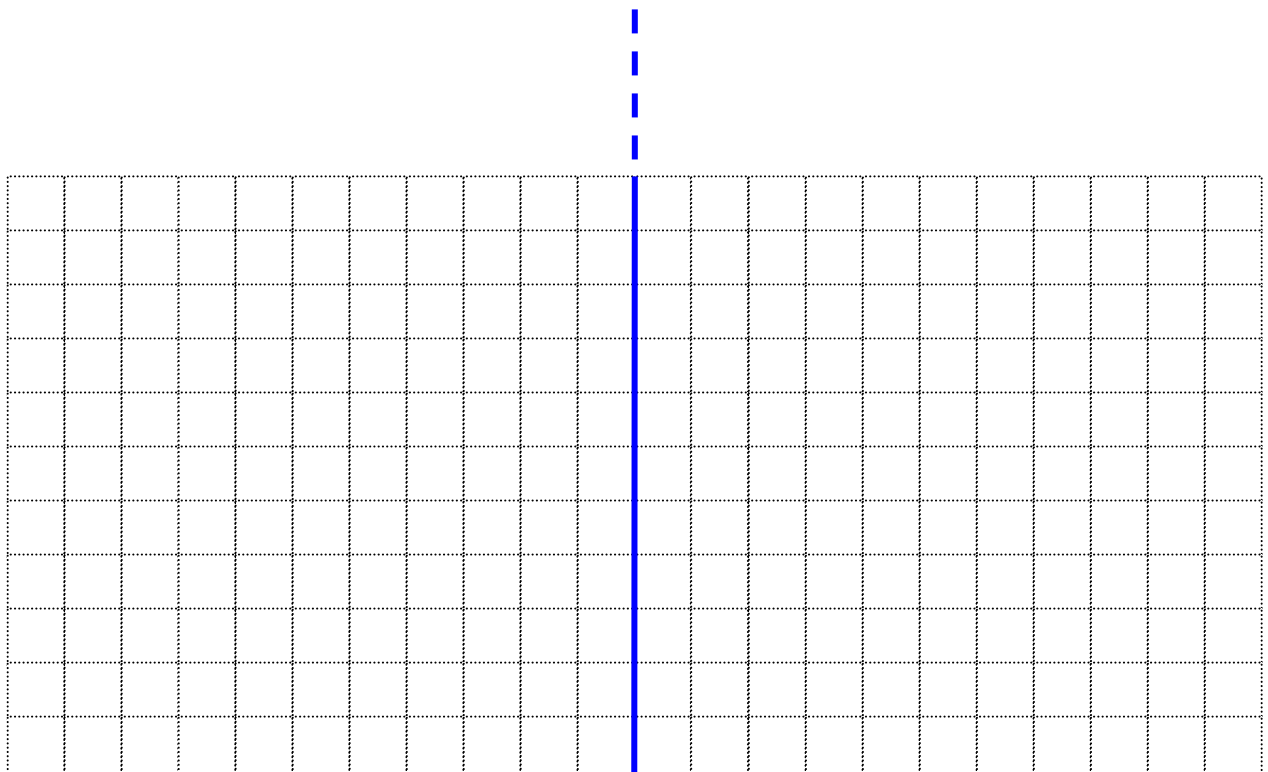
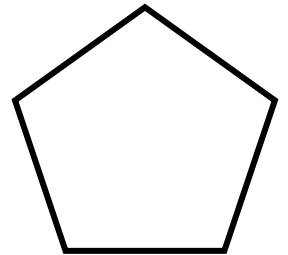
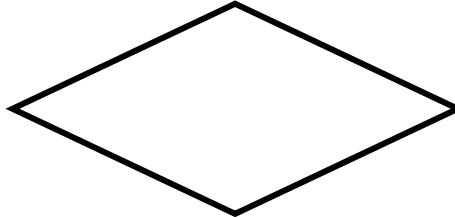
Rechercher quelles sont **les figures qui se superposent à elles-mêmes** après la symétrie orthogonale plane d'axe bleu .

L'axe bleu de la symétrie orthogonale devient alors un axe de symétrie de ces figures.

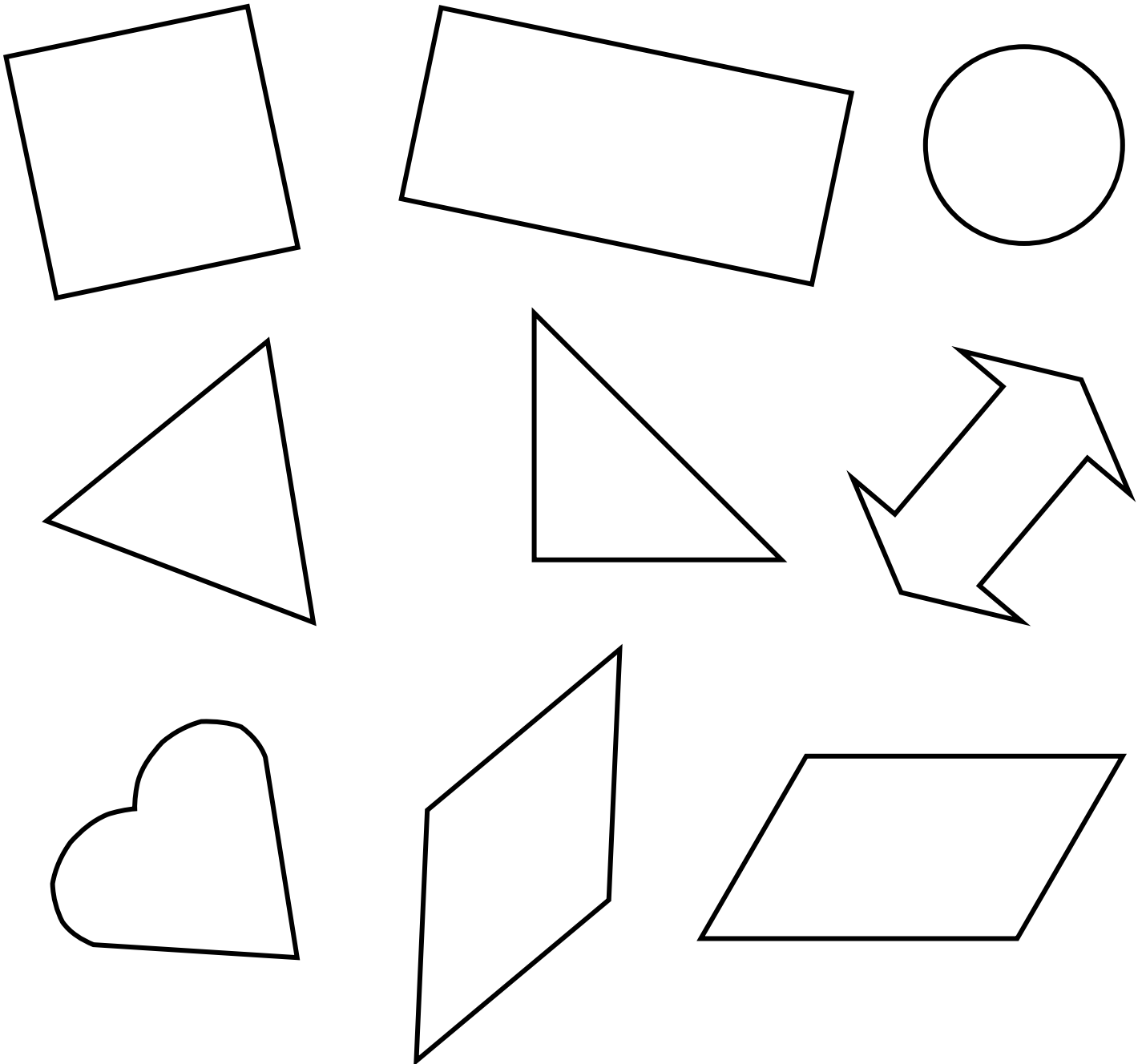


A reproduire sur feuille transparente.

Sur le quadrillage, positionner les figures sur l'axe bleu de la symétrie orthogonale, pour que ces figures se superposent à elles-mêmes (pour que l'axe de la symétrie orthogonale devienne alors un axe de symétrie de ces figures) - vérifier.



Tracer, quand cela est possible, une droite de points fixes d'une symétrie orthogonale qui permette aux figures de se "retourner" sur elles-mêmes (*rechercher les axes de symétrie des figures*).

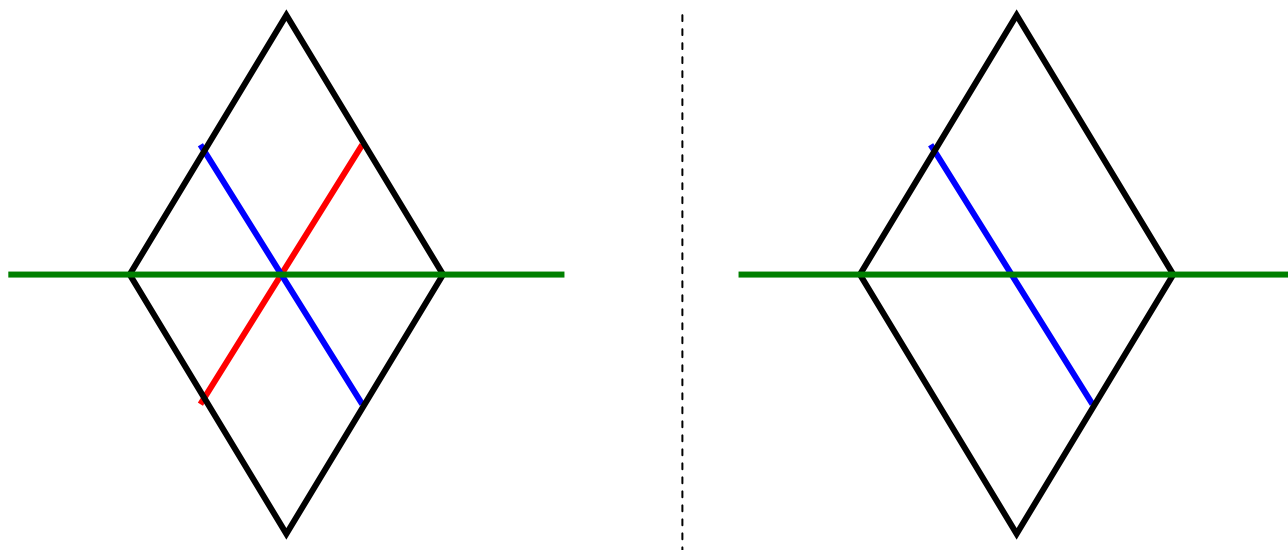


Remarque: Le parallélogramme quelconque ne possède pas d'axe de symétrie car il ne peut se superposer à lui-même par retournement .

A reproduire sur feuille transparente.

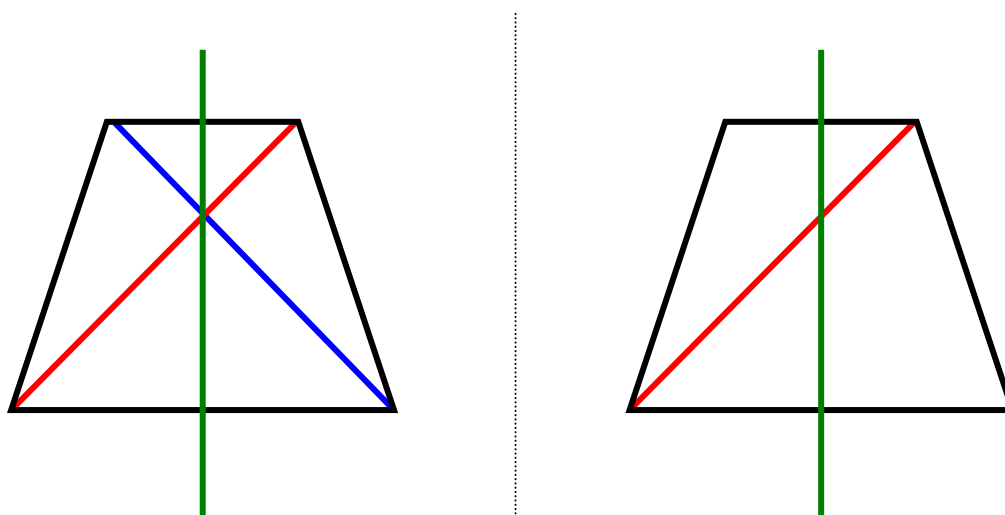
Prouver ou "démontrer" par manipulations de calques (feuilles transparentes) et à l'aide des symétries orthogonales planes.

- a) Que devient la médiane bleue après la symétrie orthogonale d'axe vert ?
Que peut-on dire de ces deux médianes ?



Dessin sur calque servant à démontrer et argumenter .

- b) Que devient la diagonale rouge après la symétrie orthogonale d'axe vert ?
Que peut-on dire de ces deux diagonales ?

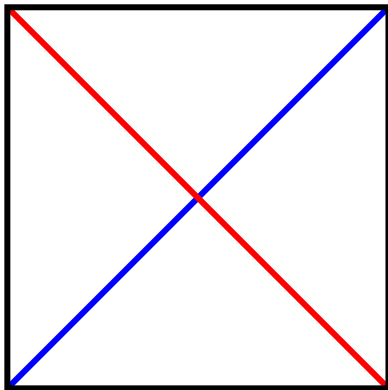


Dessin sur calque servant à démontrer et argumenter.

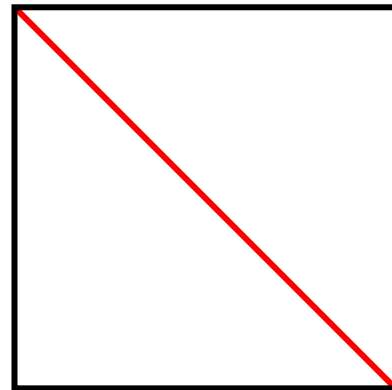
A reproduire sur feuille transparente.

c) Les diagonales d'un carré sont-elles de même longueur ?

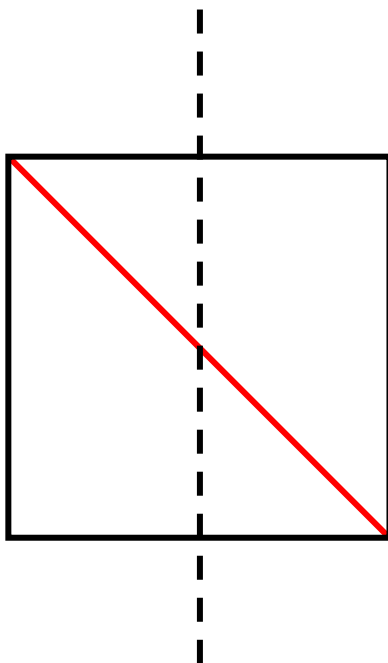
Prouve-le.



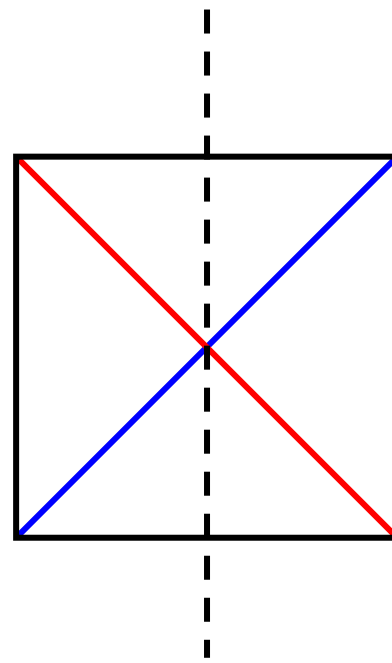
Dessin de départ



Dessin sur calque servant à la recherche du "mouvement" qui superpose la diagonale rouge à la diagonale bleue.



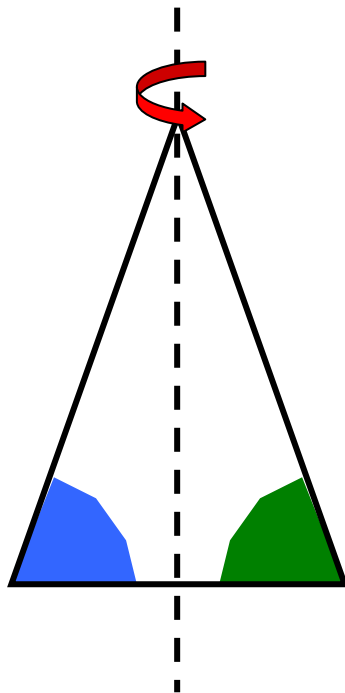
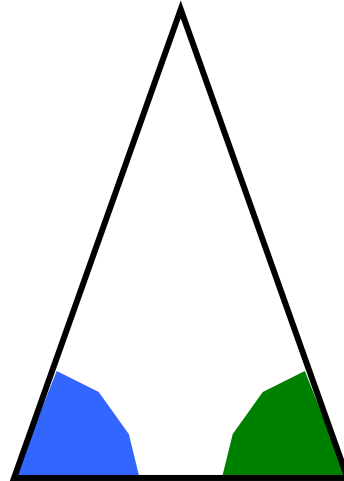
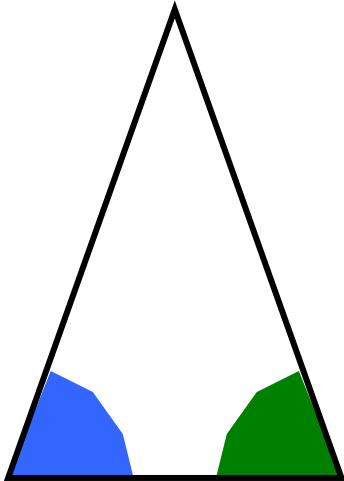
Dessin servant à illustrer une symétrie orthogonale qui superpose la diagonale rouge à la diagonale bleue.



Dessin servant à « prouver » que la symétrie orthogonale permute les diagonales bleue et rouge.

A reproduire sur feuille transparente.

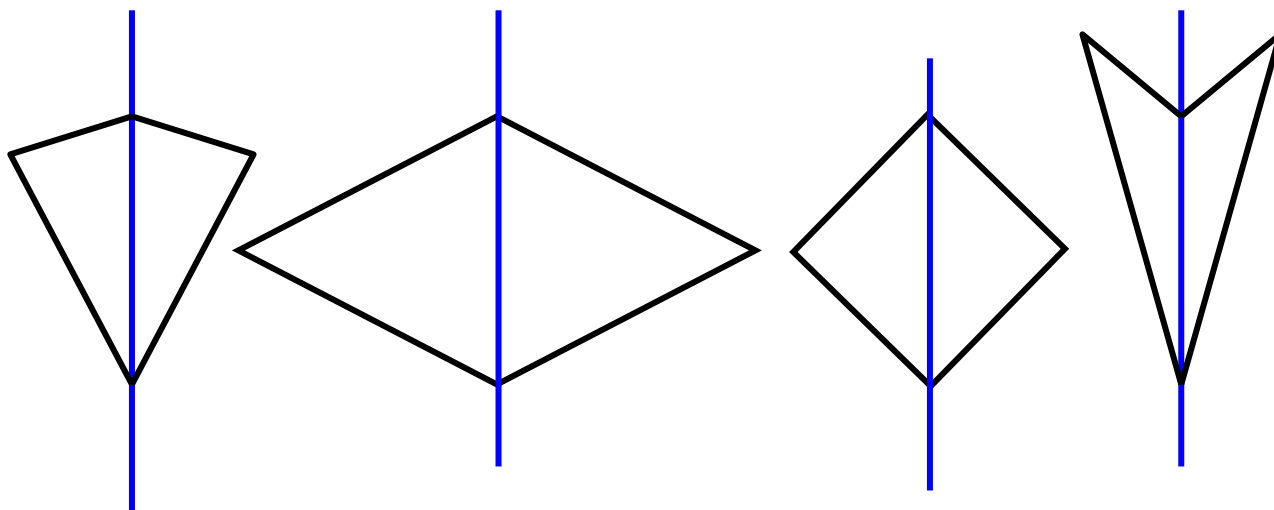
d) Dans un triangle isocèle, justifier que l'angle vert et l'angle bleu sont de même amplitude .



Vérification à l'aide d'un dessin sur calque.

e) Rechercher les différents types de quadrilatères (A B C D) admettant une diagonale comme axe de symétrie.

Exemples de solutions:



f) Rechercher les différents types de quadrilatères (A B C D) admettant une médiane comme axe de symétrie.

Exemples de solutions:

