LA GEOMETRIE DES TRANSFORMATIONS

dans l'apprentissage des mathématiques

Site WEB : www.uvgt.net

Synthèse des transformations de l'espace
en
Géométrie Elémentaire

Approche intuitive

Michel DEMAL - Jacques DUBUCQ
Danielle POPELER

H.E.C.F.H. (Mons) - U.V.G.T. - U.M.H

Michel DEMAL 34, avenue Saint Pierre B7000 Mons 065 84 77 86.
Danielle POPELER 6/1 place des Droits de l'Homme B7130 Binche 064 26 79 91.

Plan des transformations de l'espace en géométrie élémentaire

1. Transformations de l'espace qui conservent la forme des objets de l'espace ou les similitudes de l'espace

   A. Isométries de l'espace

      - Définition
      - Les deux orientations de l'espace
      - Déplacements et retournements de l'espace
      - Objets isométriques de même orientation – objets isométriques d'orientations différentes – objets sans orientation

   B. Homothéties de l'espace

      - Définition
      - Homothéties de rapport positif – homothéties de rapport négatif

   C. Similitudes de l'espace

      - Définition
      - Similitudes directes de l'espace – Similitudes indirectes de l'espace

   D. Classement des similitudes de l'espace

2. Transformations de l'espace qui ne conservent pas la forme des objets de l'espace

Michel DEMAL 34, avenue Saint Pierre B7000 Mons 065 84 77 86.
Danielle POPELER 6/1 place des Droits de l'Homme B7130 Binche 064 26 79 91.

Introduction

Semblablement aux transformations du plan, les transformations de l'espace en géométrie élémentaire se décomposent en deux grandes familles :

- d'une part, les transformations qui conservent la forme des objets de l'espace – les dimensions des objets images sont proportionnelles aux dimensions des objets initiaux.
- d'autre part, les transformations qui modifient la forme des objets – les dimensions des objets images ne sont pas toutes proportionnelles aux dimensions des objets initiaux.

Michel DEMAL 34, avenue Saint Pierre B7000 Mons 065 84 77 86.
Danielle POPELER 6/1 place des Droits de l'Homme B7130 Binche 064 26 79 91.

1. Les transformations de l'espace qui conservent la forme des objets de l'espace ou les similitudes de l'espace.

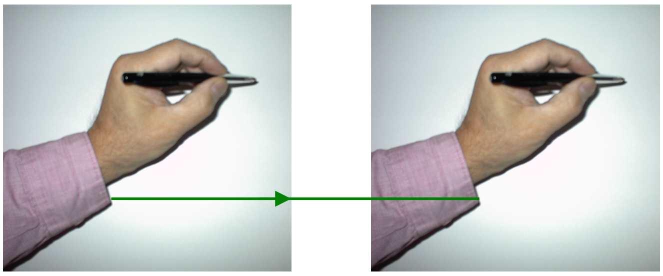
A. Les isométries de l'espace

❖ **Définition :**
Les isométries de l'espace sont les transformations de l'espace qui conservent les distances.

Exemples d'isométries de l'espace :

- les translations de l'espace

Objet de départ :
main gauche

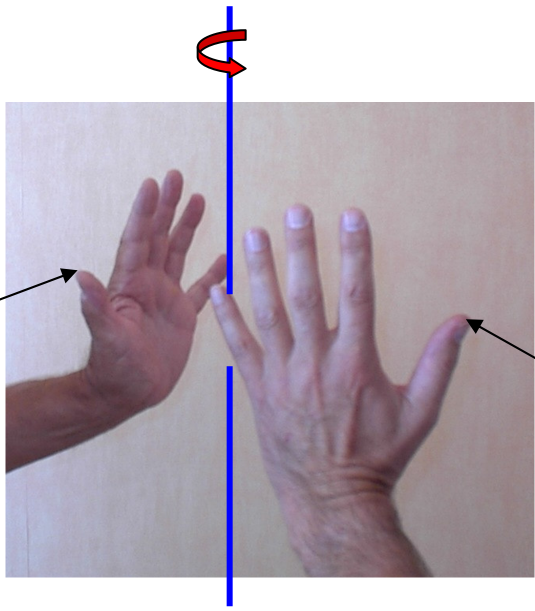


Objet d'arrivée :
main gauche

Translation horizontale de vecteur « vert »
(déplacement de l'espace)

- les rotations de l'espace autour d'un axe

Objet de départ :
main gauche



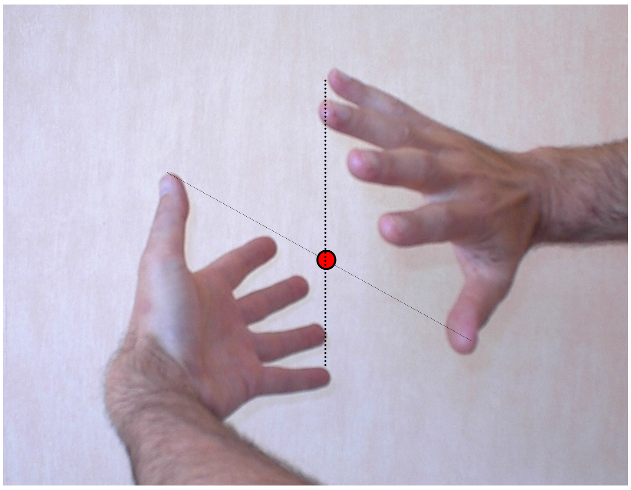
Objet d'arrivée :
main gauche

Rotation de 90° autour de l'axe bleu
(déplacement de l'espace)

Michel DEMAL 34, avenue Saint Pierre B7000 Mons 065 84 77 86.
Danielle POPELER 6/1 place des Droits de l'Homme B7130 Binche 064 26 79 91.

- les symétries centrales de l'espace

Objet de départ :
main gauche



Objet d'arrivée :
main droite

Symétrie centrale de l'espace autour du point « rouge »
(retournement de l'espace)

❖ **<u>Les deux orientations de l'espace</u>**

<u>Main gauche et main droite</u>

Main gauche

Main droite

Nos deux mains sont les mêmes (isométriques) et différentes à la fois :

- elles sont les mêmes du point de vue des dimensions (même volume, même surface de peau, même longueur de doigts …) ;
- elles sont différentes au sens où elles ont des orientations différentes ; il existe une gauche et une droite (on parle en sciences des deux formes énantiomères d'un même objet).

Les qualificatifs « gauche « et « droite » permettent de les distinguer ; de mettre en évidence les deux formes énantiomères potentielles d'un même objet. Ces qualificatifs « gauche « et « droite » sont arbitraires, on aurait pu les inverser et appeler une main gauche, une main droite, et inversement.

Michel DEMAL 34, avenue Saint Pierre B7000 Mons 065 84 77 86.
Danielle POPELER 6/1 place des Droits de l'Homme B7130 Binche 064 26 79 91.

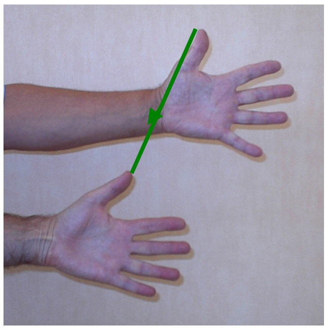
❖ <u>Déplacements et retournements de l'espace</u>

Les isométries de l'espace se décomposent en « deux sous-familles » : les déplacements et les retournements de l'espace.

Déplacements de l'espace

En géométrie élémentaire, une définition des déplacements de l'espace peut être donnée via les types de mains (ou de pieds) : *« un déplacement de l'espace est une isométrie de l'espace qui conserve les types de mains (ou de pieds) ».*

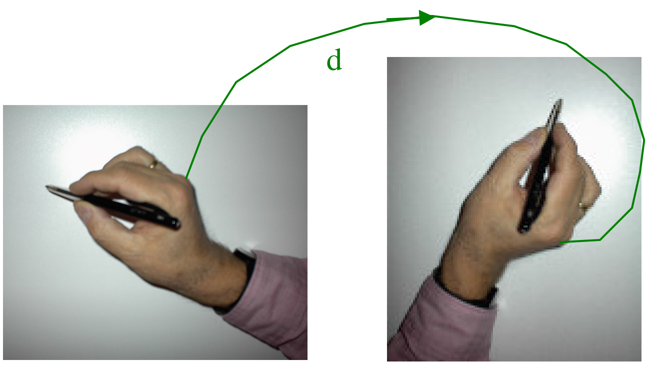
Objet de départ :
main gauche



Objet d'arrivée :
main gauche

Déplacement de l'espace
(orientation conservée – type de mains conservé)

Objet de départ :
(main droite)



Objet d'arrivée:
(main droite)

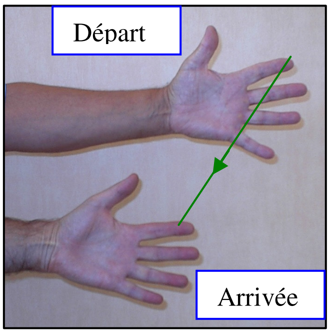
Déplacement de l'espace
(orientation conservée – type de mains conservé)

Michel DEMAL 34, avenue Saint Pierre B7000 Mons 065 84 77 86.
Danielle POPELER 6/1 place des Droits de l'Homme B7130 Binche 064 26 79 91.

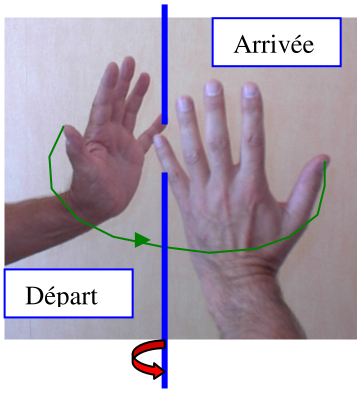
Types de déplacements de l'espace

On peut montrer que les déplacements de l’espace se réduisent :

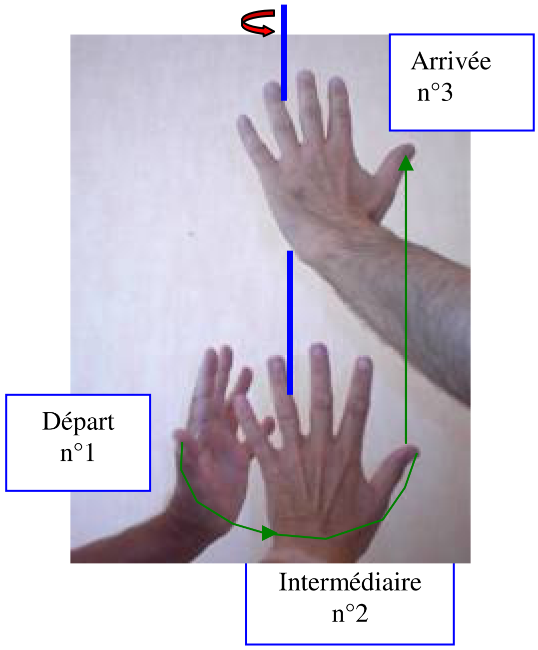
aux translations de l’espace



aux rotations de l’espace



aux vissages de l’espace



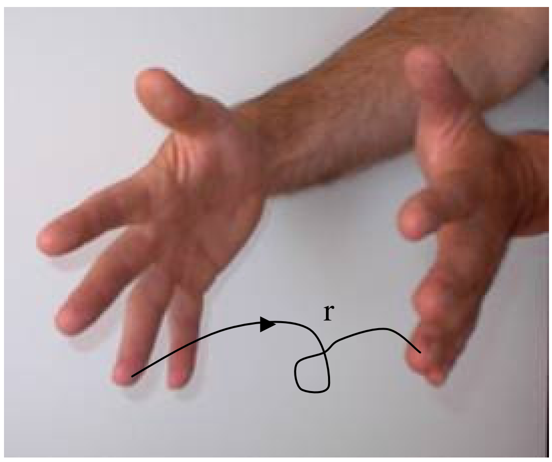
<u>Vissage</u> : rotation suivie d’une translation dont la direction est parallèle à l’axe de la rotation.

<u>Remarque :</u>
Une symétrie orthogonale dans l’espace est un déplacement de l’espace (une rotation de 180°); alors qu’une symétrie orthogonale dans le plan est un retournement du plan.

Retournements de l'espace

En géométrie élémentaire, une définition des retournements de l’espace peut être donnée via les types de mains ou de pieds : « *un retournement de l’espace est une isométrie de l’espace qui inverse les types de mains (ou de pieds)* ».

Objet de départ : main droite

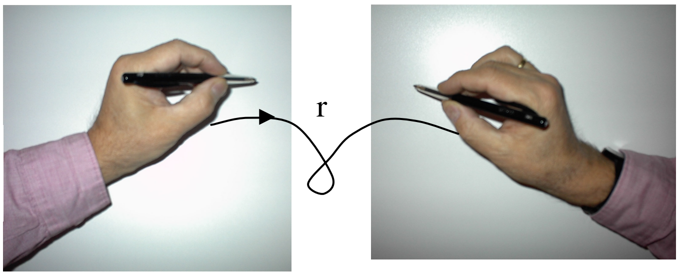


Objet d’arrivée : main gauche

Retournement de l’espace
(orientation inversée)

Michel DEMAL 34, avenue Saint Pierre B7000 Mons 065 84 77 86.
Danielle POPELER 6/1 place des Droits de l'Homme B7130 Binche 064 26 79 91.

Objet de départ :
main gauche



Objet d'arrivée :
main droite

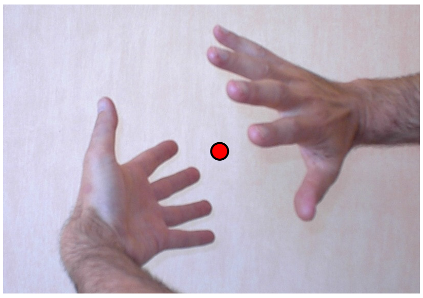
Retournement de l'espace
(orientation inversée)

Types de retournements de l'espace

- On peut montrer que les retournements se réduisent :

aux symétries centrales de l'espace

Objet de départ :
main droite



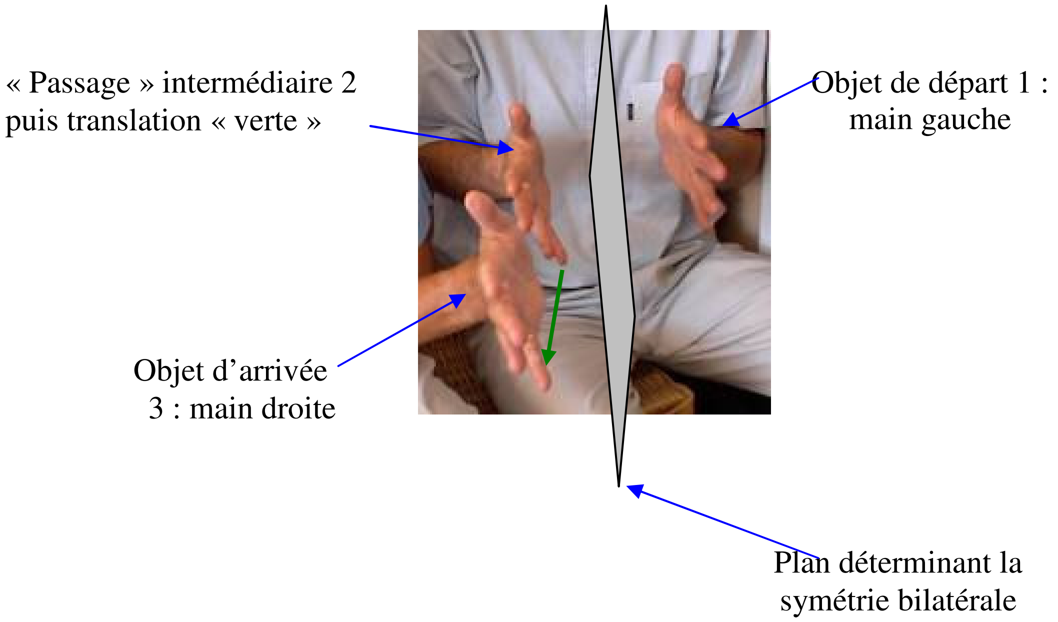
Objet d'arrivée :
main gauche

<u>Remarque :</u>
Dans l'espace, une symétrie centrale est un retournement de l'espace alors que dans le plan, une symétrie centrale est un déplacement du plan (une rotation de 180 ° du plan).

aux symétries bilatérales
(symétries par rapport à un plan)

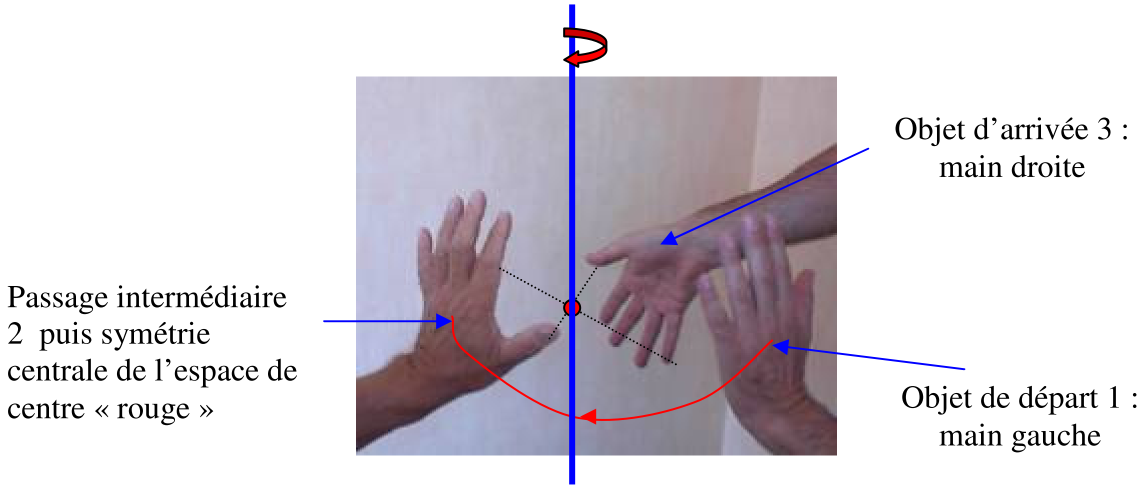
Michel DEMAL 34, avenue Saint Pierre B7000 Mons 065 84 77 86.
Danielle POPELER 6/1 place des Droits de l'Homme B7130 Binche 064 26 79 91.

aux symétries bilatérales glissées



Symétrie bilatérale glissée : symétrie bilatérale suivie d'une translation dont la direction est parallèle au plan définissant la symétrie bilatérale.

aux antitrotations de l'espace



Antirotation : rotation de l'espace suivie d'une symétrie centrale de l'espace dont le centre appartient à l'axe de la rotation.

Michel DEMAL 34, avenue Saint Pierre B7000 Mons 065 84 77 86.
Danielle POPELER 6/1 place des Droits de l'Homme B7130 Binche 064 26 79 91.

<u>Objets isométriques de même orientation – objets isométriques d'orientations différentes – objets sans orientation (non orientés)</u>

<u>Objets de mêmes dimensions et de même orientation.</u>

Deux objets isométriques (de mêmes dimensions) de l'espace sont de même orientation si et seulement si il existe uniquement un déplacement de l'espace qui applique le premier sur le deuxième.

<u>Remarque:</u>

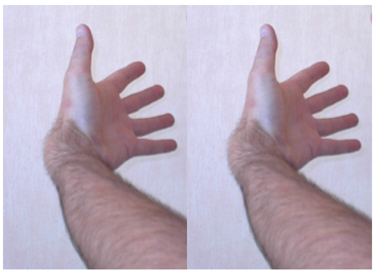
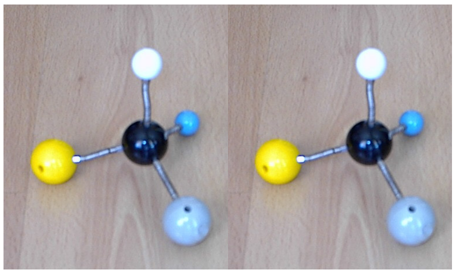
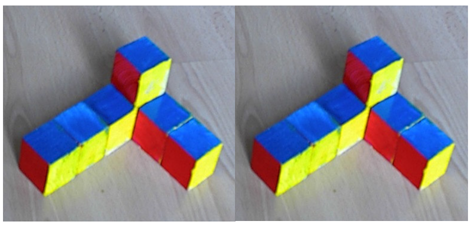
Uniquement un déplacement de l'espace, au sens où il n'existe pas de retournement de l'espace qui permet de « passer » d'un objet à l'autre.

Exemples de paires d'objets isométriques de même orientation







Michel DEMAL 34, avenue Saint Pierre B7000 Mons 065 84 77 86.
Danielle POPELER 6/1 place des Droits de l'Homme B7130 Binche 064 26 79 91.

Objets de mêmes dimensions et d’orientations différentes

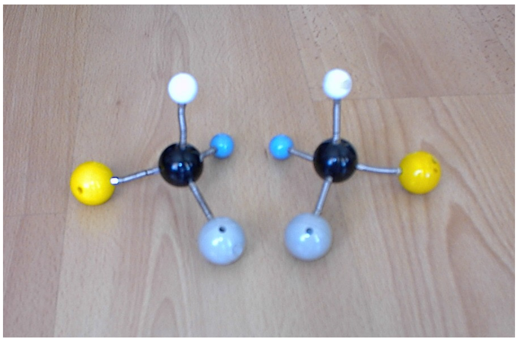
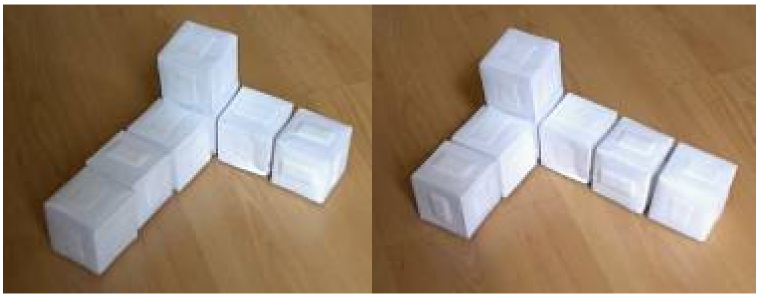
Deux objets isométriques (de mêmes dimensions) de l’espace sont d'orientations différentes si et seulement si il existe uniquement un retournement de l’espace qui applique le premier sur le deuxième.

Remarque : Uniquement un retournement de l’espace, au sens où il n’existe pas de déplacement de l’espace qui permet de « passer » d’un objet à l’autre.

Exemples de paires d’objets isométriques d’orientations différentes





Objets de l’espace sans orientation (non orentés)

Certains objets de l’espace ne possèdent pas une orientation propre, ni une forme « gauche », ni une forme « droite ».

Un objet de l’espace ne possède pas d’orientation propre (une forme gauche ou une forme droite) si et seulement si il existe un retournement de l’espace qui le superpose à lui-même.

Remarques :

- Les objets qui admettent un centre de symétrie ou un plan de symétrie ne possèdent pas une forme gauche ni une forme droite: ils sont non orientés.
- Il existe des objets qui ne possèdent pas de plan de symétrie ni de centre de symétrie et qui sont néanmoins non orientés. Ces objets de l’espace sont superposables à eux-mêmes soit par une antirotation soit par une symétrie bilatérale glissée.
- Un objet non orienté (sans orientation) peut devenir orienté si on lui ajoute une "information" (un élément) qui crée cette orientation.

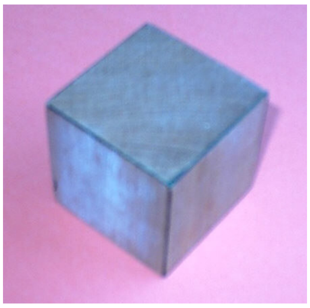
Michel DEMAL 34, avenue Saint Pierre B7000 Mons 065 84 77 86.
Danielle POPELER 6/1 place des Droits de l'Homme B7130 Binche 064 26 79 91.

Exemples d'objets de l'espace sans orientation (non orientés).





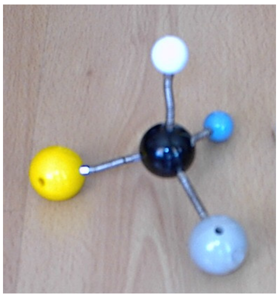


<u>Objets de l'espace avec orientations (objets orientés).</u>
Certains objets de l'espace possèdent deux orientations différentes; ils peuvent apparaître sous une « forme gauche » et « une forme droite ». Dans d'autres domaines scientifiques (chimie, biologie, physique, …) , on distingue ces deux types de formes en parlant de formes énantiomères.

Exemples :



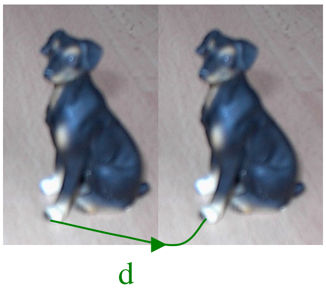



Michel DEMAL 34, avenue Saint Pierre B7000 Mons 065 84 77 86.
Danielle POPELER 6/1 place des Droits de l'Homme B7130 Binche 064 26 79 91.

En résumé, lorsque deux objets sont de mêmes dimensions (isométriques) trois cas sont possibles :

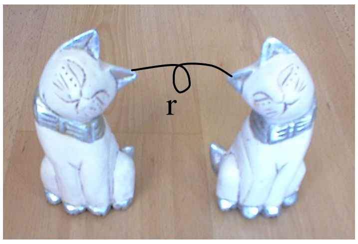
1) soit, il existe uniquement un déplacement de l'espace qui applique le premier objet sur le second ; dans ce cas, les deux objets ont les mêmes dimensions et la même orientation.

Exemple :



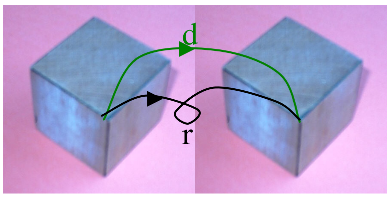
2) soit, il existe uniquement un retournement de l'espace qui applique le premier objet sur le second ; dans ce cas, les deux objets ont les mêmes dimensions mais leur orientation est différente.

Exemple :



3) soit il existe un déplacement de l'espace et un retournement de l'espace qui appliquent le premier objet sur le second ; dans ce cas, les deux objets ne possèdent pas d'orientation ; ils sont non orientés. Ils ne sont ni "gauches" ni "droits".

Exemple :



<u>Remarque</u>:
Un objet de l'espace possède deux orientations différentes (une forme gauche et une forme droite) si et seulement si il n'existe pas de retournement de l'espace qui le superpose à lui-même.

ou encore

Un objet de l'espace possède deux orientations différentes (une forme gauche et une forme droite) si et seulement si les seules isométries de l'espace qui le superposent à lui-même sont des déplacements.

Michel DEMAL 34, avenue Saint Pierre B7000 Mons 065 84 77 86.
Danielle POPELER 6/1 place des Droits de l'Homme B7130 Binche 064 26 79 91.

B. Les homothéties de l’espace.

Définition :

Les homothéties de l'espace multiplient toutes les distances de l'objet par un nombre réel strictement positif. L’image de cet objet est un objet « parallèle » et proportionnel à l’objet initial.

Remarque:

Si ce réel est différent de 1, alors l’image de l'objet, par l’homothétie considérée, est agrandie ou réduite proportionnellement et est « parallèle » à l’objet initial.

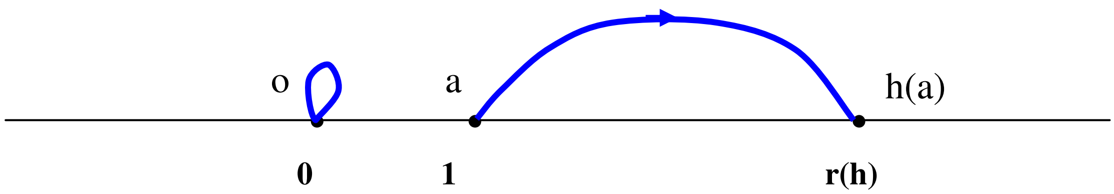
Si ce réel est égal à 1, alors l’image de l'objet, par l’homothétie considérée, est isométrique et " parallèle" à l’objet initial.

Semblablement au plan, une homothétie de l’espace (h) peut se définir à partir d’un point 0 (son centre) et d’un nombre réel non nul (positif ou négatif) appelé rapport d’homothétie (r (h)).

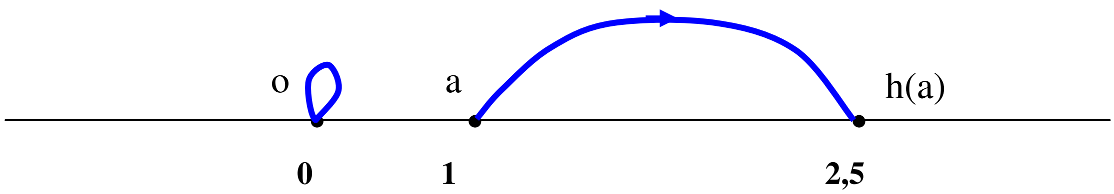
Définition

$h\ (o, r(h)) : E^3 \rightarrow E^3$

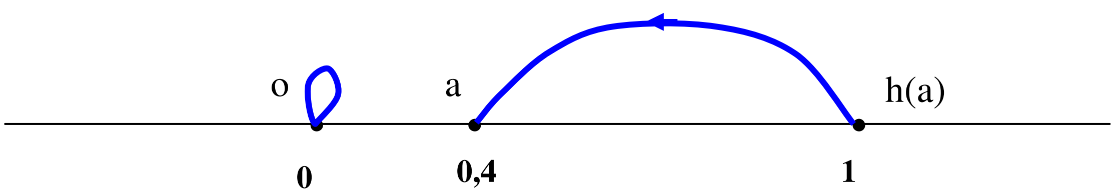
$a \rightarrow h(a)$ où $abs_{(o,\ a)}\ h(a) = r(h)$ (L’abscisse de h(a) dans le repère (o,a) vaut r(h).)



Exemples d’homothéties de l’espace.

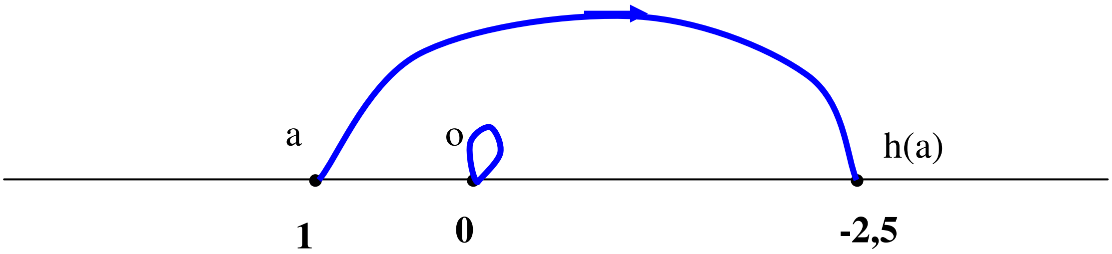


h(o,2,5) : homothétie de l’espace de centre o et de rapport 2,5. Agrandissement – orientation conservée

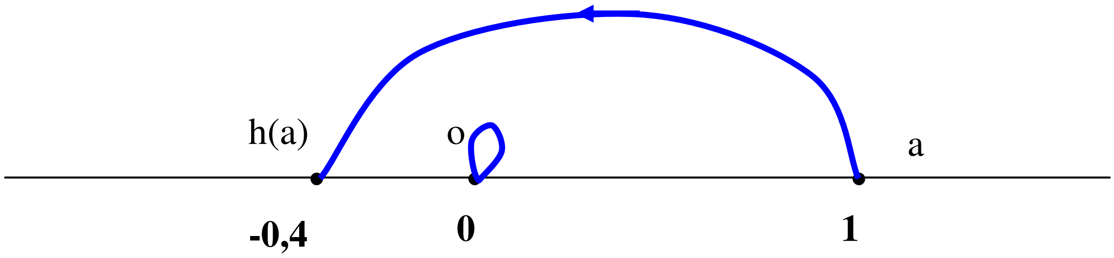


h(o,0,4) : homothétie de l’espace de centre o et de rapport 0,4. Réduction – orientation conservée

Michel DEMAL 34, avenue Saint Pierre B7000 Mons 065 84 77 86.
Danielle POPELER 6/1 place des Droits de l'Homme B7130 Binche 064 26 79 91.



h(o,-2,5) : homothétie de l’espace de centre o et de rapport –2,5. Agrandissement – orientation inversée



h(o,-0,4) : homothétie de l’espace de centre o et de rapport –0,4. Réduction – orientation inversée

Remarques :

- Il existe des homothéties de rapport positif ou de rapport négatif.
- Les homothéties de rapport + 1 ou de rapport -1 conservent les distances.
- Les homothéties de l’espace multiplient toutes les distances par la valeur absolue du rapport d’homothétie.
- Une homothétie de l’espace de rapport –1 équivaut à une symétrie centrale dans l’espace (un retournement de l'espace).
- Les homothéties de rapport strictement positif conservent l'orientation de l'espace.
- Les homothéties de rapport strictement négatif inversent l'orientation de l'espace.
- Semblablement aux homothéties, les translations "donnent" également une image parallèle à l'objet initial.

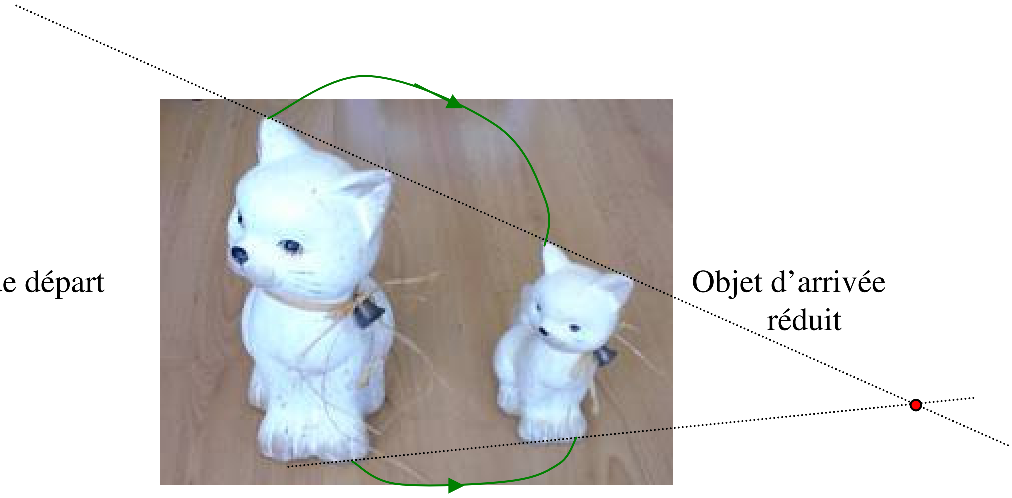
Homothéties de rapport positif – homothéties de rapport négatif

- Dans l’espace, les homothéties de rapport positif conservent les types d’orientations de l’espace (conservent les types de mains ou de pieds).
- Dans l’espace,les homothéties de rapport négatif inversent les types d’orientation de l’espace (inversent les types de mains ou de pieds)).

Michel DEMAL 34, avenue Saint Pierre B7000 Mons 065 84 77 86.
Danielle POPELER 6/1 place des Droits de l'Homme B7130 Binche 064 26 79 91.

Exemples de paires d'objets homothétiques dans l'espace.

Objet de départ



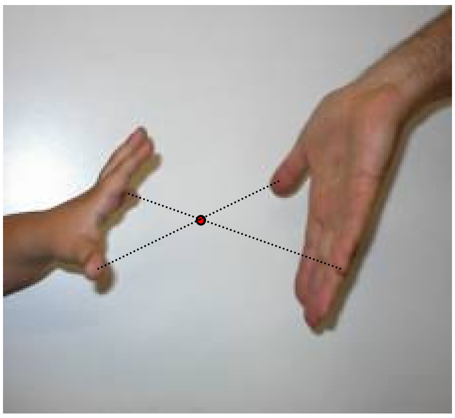
Objet d'arrivée
réduit

Homothétie de rapport positif
réduction - conservation du type d'orientation

- La grande oreille droite devient la petite oreille droite
- La grande patte gauche devient la petite patte gauche

Dans l'exemple proposé, le rapport vaut approximativement « 0,6 ».

Départ :
petite main gauche



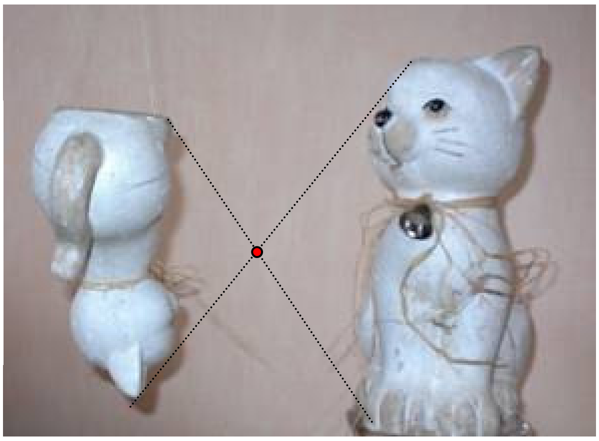
Arrivée :
grande main droite « parallèle »

Homothétie de rapport négatif - inversion du type de mains
agrandissement
(inversion de l'orientation)

Dans l'exemple proposé, le rapport vaut approximativement « - 1,2 »

Michel DEMAL 34, avenue Saint Pierre B7000 Mons 065 84 77 86.
Danielle POPELER 6/1 place des Droits de l'Homme B7130 Binche 064 26 79 91.

Objet d'arrivée :
petit modèle de
chat « dextrogyre »
(de « forme gauche »)
« parallèle » à l'objet de
départ



Objet de départ :
grand modèle de
chat « lévogyre »
(de « forme droite »)

Homothétie de rapport négatif
inversion de l'orientation - réduction

- La grande oreille droite devient la petite oreille gauche.
- La grande patte droite devient la petite patte gauche.

Dans l'exemple proposé, le rapport vaut approximativement « -0,6 »

C. <u>Les similitudes de l'espace.</u>

<u>Définition</u>
Les similitudes de l'espace sont des composées d'homothéties de l'espace avec des isométries de l'espace (des déplacements de l'espace et/ou des retournements de l'espace).
Les similitudes multiplient toutes les distances par un nombre réel strictement positif.

De cette définition, il résulte que les homothéties de l'espace et les isométries de l'espace sont aussi des similitudes de l'espace.

<u>Remarque:</u>
Par une similitude, un objet et son image sont proportionnels mais non nécessairement parallèles entre eux.

<u>Similitudes directes de l'espace – Similitudes indirectes de l'espace</u>

- Les similitudes directes de l'espace sont les similitudes de l'espace qui conservent les types d'orientations (qui conservent les types de mains et de pieds).

- Les similitudes indirectes de l'espace sont les similitudes de l'espace qui inversent les types d'orientations (qui inversent les types de mains et de pieds).

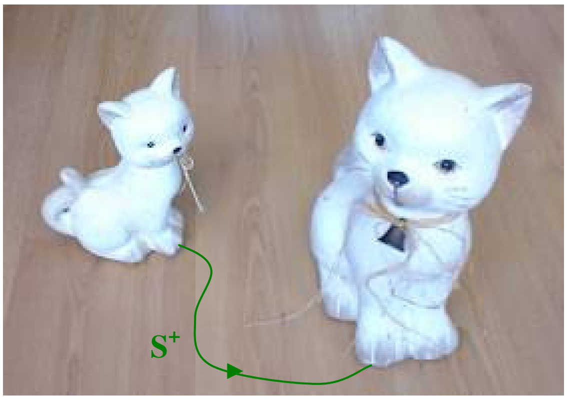
Michel DEMAL 34, avenue Saint Pierre B7000 Mons 065 84 77 86.
Danielle POPELER 6/1 place des Droits de l'Homme B7130 Binche 064 26 79 91.

Remarques :
Les similitudes conservent ou inversent les types d'orientations de l'espace selon le nombre de retournements et le nombre de rapports d'homothéties négatifs intervenant dans la similitude.

- Si le nombre de retournements plus le nombre de rapports d'homothéties négatifs est pair, alors la similitude est directe.
- Si le nombre de retournements plus le nombre de rapports d'homothéties négatifs est impair, alors la similitude est indirecte.

Exemples de similitudes de l'espace

Objet de départ

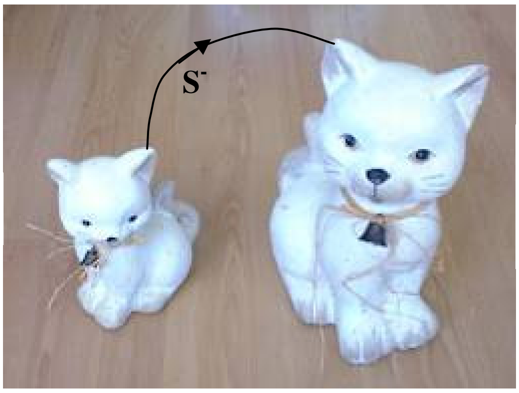


Objet d'arrivée agrandi et de même orientation (« déplacé »)

Similitude directe
conservation de l'orientation – conservation du type de pattes

Dans l'exemple proposé, toutes les distances sont multipliées approximativement par « 1,66 »

Objet de départ



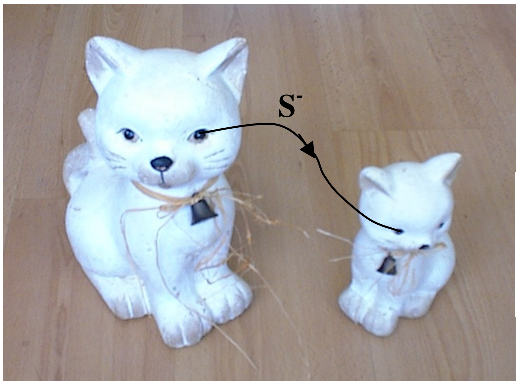
Objet d'arrivée agrandi et d'orientation différente (« retourné »)

Similitude indirecte ou inverse
inversion de l'orientation – inversion du type d'oreilles
(la petite oreille gauche devient la grande oreille droite)

Dans l'exemple proposé, toutes les distances sont multipliées approximativement par « 1,66 »

Michel DEMAL 34, avenue Saint Pierre B7000 Mons 065 84 77 86.
Danielle POPELER 6/1 place des Droits de l'Homme B7130 Binche 064 26 79 91.

Objet de départ



Objet d'arrivée réduit et d'orientation différente (« retourné »)

Similitude indirecte (inverse)
inversion de l'orientation – inversion du type d'yeux
(le grand œil gauche devient le petit œil droit)

Dans l'exemple proposé, toutes les distances sont multipliées approximativement par « 0,6 »

2. Les transformations de l'espace qui ne conservent pas la forme des objets de l'espace

En géométrie élémentaire, les transformations de l'espace qui ne conservent pas la forme des objets de l'espace et qui sont « étudiées », sont essentiellement les projections parallèles (les projections solaires) et les projections centrales.

Michel DEMAL 34, avenue Saint Pierre B7000 Mons 065 84 77 86.
Danielle POPELER 6/1 place des Droits de l'Homme B7130 Binche 064 26 79 91.

Chimie

Les molécules, telles nos deux mains

Un Nobel américano-japonais JACQUES PONCIN (Le SOIR)

Le prix Nobel de chimie a cette année couronné trois pionniers de la catalyse inverse optique. Ainsi formulé, l'objet des travaux de William. Knowles, Ryoji Noyori et Barry Sharpless peut sembler bien hermétique. Pourtant; la technique qu'ils ont inventée a déjà eu de nombreuses applications, notamment en pharmacie. Au point qu'ils auraient presque pu recevoir le Nobel de la médecine.

Au départ, une découverte franco-hollandaise du XIX^{e}, qui montre que les produits chimiques sont des mélanges de deux types de molécules, les unes dites «s», les autres «r». Cette propriété fut qualifiée de chiralité, d'après le mot grec qui signifie «main», dans la mesure où les molécules, les énantiomères comme on dit, «s» et «r» se ressemblent et diffèrent comme nos deux mains.

Cette trouvaille serait restée une curiosité s'il ne s'était avéré que la chiralité. avait une grande importance dans la nature. Ainsi, le même produit, le limonène sent le citron s'il est «s », 1'orange, s'il est «r», ce qui s'explique par le fait que nous sommes dotés de récepteurs très spécifiques, qui donc ne réagissent qu'à un énantiomère. Moins anecdotique (hélas) : un énantiomère de la thalidomide (Softenon) est un médicament anti-nausées pour les femmes enceintes, l'autre provoque des dommages irréversibles aux fœtus... On l'a appris un peu tard...

Ceci signifie clairement que lors qu'on fabrique un médicament, il convient d'être attentif à la possible réaction différente de l'organisme face aux deux types de molécules. Ainsi, pour aider l'organisme d'un parkinsonien à fabriquer à nouveau un peu de la dopamine qui manque à son cerveau, il faut lui en donner le précurseur dans sa forme «1».

Et c'est précisément en essayant de fabriquer de la "L-dopa" que William Knowles, chimiste de la firme Monsanto, de.Saint-Louis, dans le centre des Etats-Unis, a compris que pour réaliser des synthèses chimiques dont il ne sort qu'un énantiomère, il fallait les catalyser (les «doper») avec des produits ayant eux-mêmes une chiralité bien déterminée.

C'est ainsi qu'il fut le premier à réaliser des synthèses asymétriques, un travail que reprit et amplifia un chercheur de l'université de Nagoya, Ryoji Noyori. A eux deux, ils se partagent la moitié du Nobel. L'autre moitié du prix va à un chercheur du Scripps Institute. (Californie), Barry Sharpless qui appliqua le même principe à un autre type de réactions. Les deux premiers avaient travaillé sur l'hydrogénation. Sharpless fit de même avec l'oxygénation, ouvrant la porte à de nombreuses applications industrielles dans les domaines des médicaments, des édulcorants, des insecticides.

Michel DEMAL 34, avenue Saint Pierre B7000 Mons 065 84 77 86.
Danielle POPELER 6/1 place des Droits de l'Homme B7130 Binche 064 26 79 91.