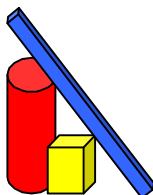


LA GEOMETRIE DES TRANSFORMATIONS

dans l'apprentissage des mathématiques



Site WEB : www.uvgt.net

Synthèse des transformations du plan en Géométrie Élémentaire

Approche intuitive

Michel DEMAL - Jacques DUBUCQ
Danielle POPELER

U.R.E.M. (U.L.B.) – H.E.C.F.H.- U.V.G.T.

Plan des transformations du plan en géométrie élémentaire

I. Transformations du plan qui conservent la forme des figures planes ou les similitudes du plan

1. Figures planes déformées – Figures planes non déformées
2. Figures planes isométriques – Figures planes déplacées –
Figures planes retournées
3. Figures planes proportionnelles - Figures planes semblables
4. Figures semblables (proportionnelles) - agrandies - réduites –
isométriques
5. Tableau récapitulatif des figures semblables du plan
6. Types de transformations du plan qui conservent la forme des
figures planes
 - Isométries planes
 - Homothéties planes
 - Similitudes planes
7. Structure des transformations du plan en géométrie élémentaire
8. Tableau récapitulatif des isométries du plan

II. Transformations du plan qui ne conservent pas la forme des figures planes

I. Transformations du plan qui conservent la forme des figures planes ou les similitudes du plan

1. Figures planes déformées - Figures planes non déformées

1. Figures planes déformées - figures planes non déformées

Après transformation du plan, une figure plane est soit déformée, soit non déformée (= semblable).

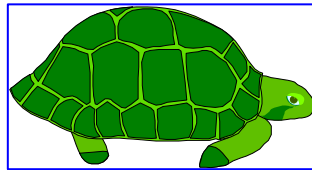
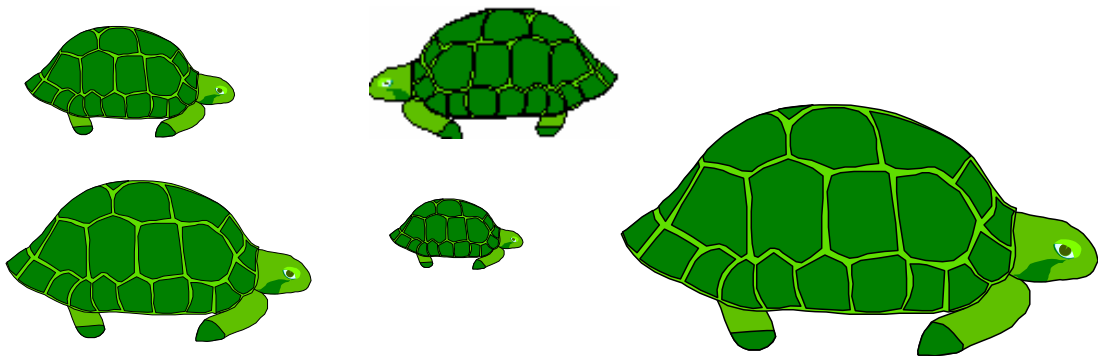


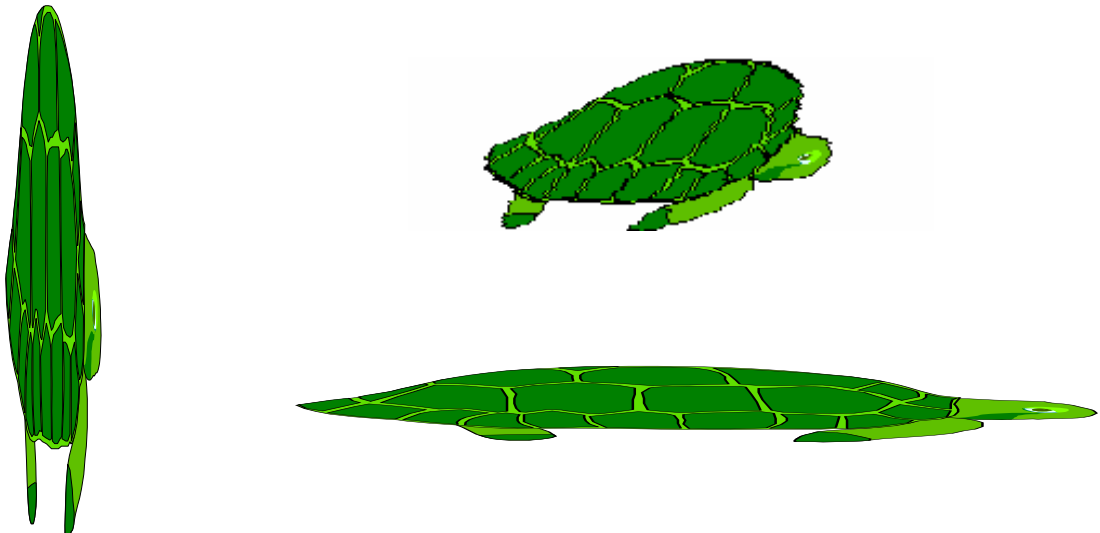
Figure initiale

A. Exemples de figures planes non déformées par rapport à la figure initiale.



Une figure plane non déformée est une figure semblable.

B. Exemples de figures planes déformées par rapport à la figure initiale.



2. Figures planes isométriques

Figures planes déplacées

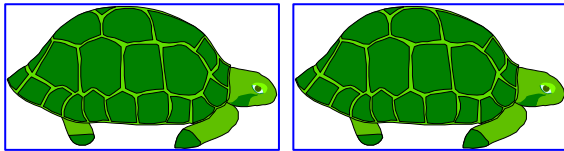
Figures planes retournées

A. Figures isométriques (premières définitions)

Deux figures planes sont isométriques si et seulement si on peut « passer » de l'une à l'autre à l'aide d'un transparent.

Exemples

1)

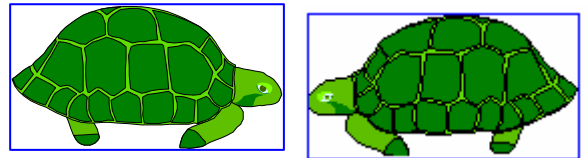


F_1

F_2

F_1 est isométrique à F_2 .

2)

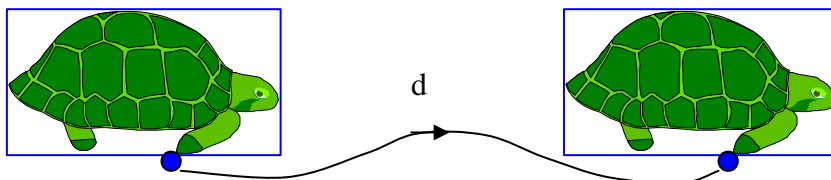


F_3

F_4

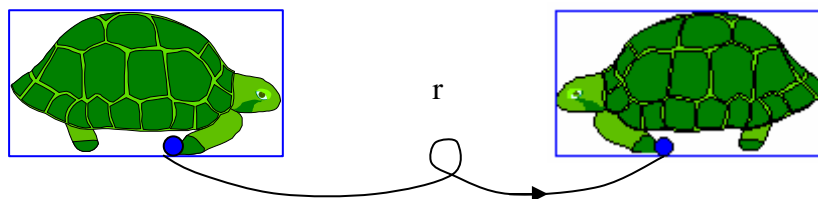
F_3 est isométrique à F_4 .

B. Figures superposables par déplacement (figures isométriques déplacées)



Deux figures planes sont superposables par **un déplacement** du plan si on peut, à l'aide d'un transparent, « passer » de l'une à l'autre **sans quitter le plan**.

C. Figures superposables par retournement (figures isométriques retournées)

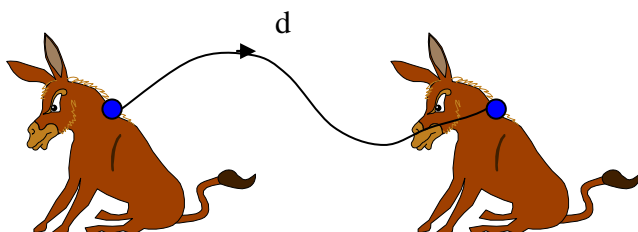


Deux figures planes sont superposables par **un retournement** du plan si on peut « passer » de l'une à l'autre **en retournant une seule fois le transparent**.

D. Figures isométriques déplacées et/ou retournées

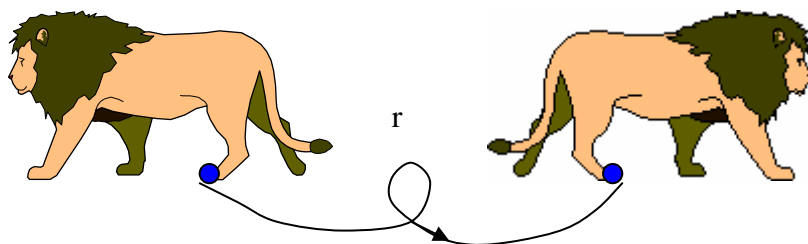
Si deux figures sont isométriques, alors on peut « passer » de l'une à l'autre soit:

a) uniquement par un **déplacement**



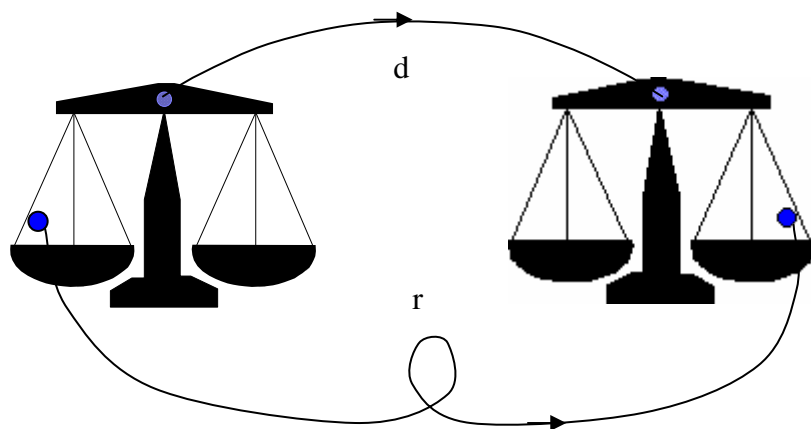
On parle dans ce cas de figures isométriques déplacées ou de figures identiques.

b) uniquement par un **retournement**



On parle dans ce cas de figures isométriques retournées.

c) par **déplacement** et aussi par **retournement**



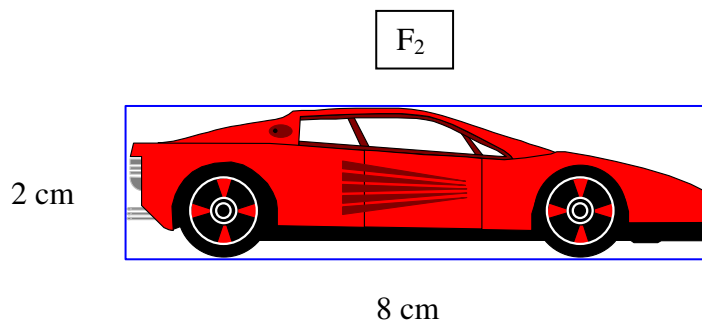
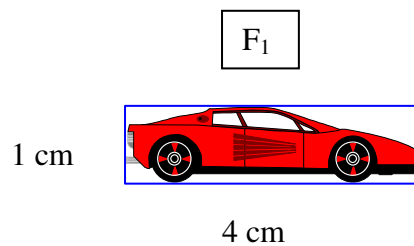
3. Figures planes proportionnelles Figures planes semblables

Définitions

- ◆ Deux figures sont semblables (proportionnelles) si toutes les dimensions de l'une sont obtenues en multipliant par un même nombre positif toutes les dimensions de l'autre.

ou encore

- ◆ Deux figures sont semblables si elles ont la même forme.



Par rapport à F_1 , toutes les dimensions de F_2 ont été multipliées par "2".

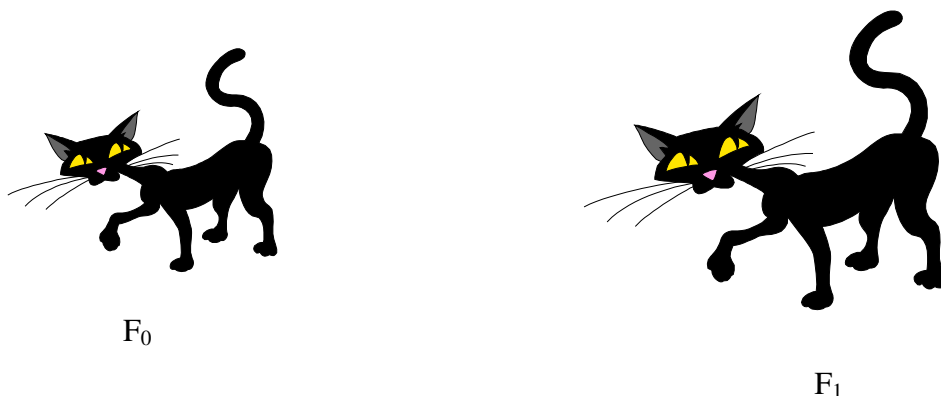
Par rapport à F_2 , toutes les dimensions de F_1 ont été multipliées par "1/2".

4. Figures semblables (proportionnelles) agrandies - réduites - isométriques

4. 1. Figures agrandies - Figures réduites - Figures isométriques

Lorsque deux figures sont semblables, trois cas sont possibles:

- ♦ soit la figure semblable est **agrandie** par rapport à la figure initiale (F_0).



La figure F_1 est semblable "agrandie-déplacée" par rapport à la figure F_0 .

- ♦ soit la figure semblable est **réduite** par rapport à la figure initiale.



La figure F_2 est semblable "réduite-retournée" par rapport à la figure F_0 .

- ♦ soit la figure semblable est **isométrique** par rapport à la figure initiale.
Dans ce cas, les dimensions correspondantes des deux figures sont les mêmes.



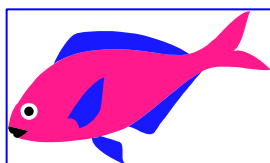
La figure F_3 est semblable "isométrique-retournée" par rapport à la figure F_0 .

4.2. Les différents cas des figures semblables ou proportionnelles

Comme indiqué au point 4.1., lorsque deux figures sont semblables, trois cas sont possibles:

Par rapport à la figure initiale F_0 , la figure semblable obtenue est soit agrandie proportionnellement, soit réduite proportionnellement, soit isométrique."

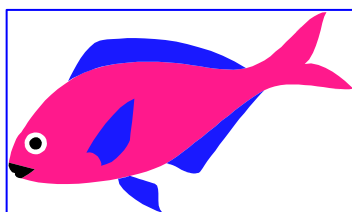
Pour chacun de ces trois cas, il faut distinguer aussi les figures "déplacées" des figures "retournées".



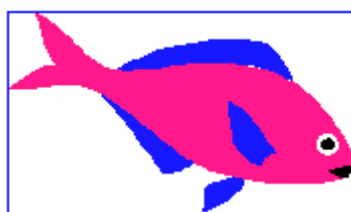
F_0

Ainsi, les exemples ci-dessous illustrent les six cas possibles des figures semblables (proportionnelles) par rapport à la figure F_0 .

a) Des figures semblables agrandies déplacées (F_1) et des figures semblables agrandies retournées (F_2).



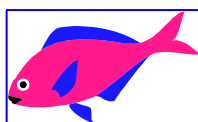
F_1



F_2

Toutes les dimensions sont multipliées par un nombre strictement plus grand que un.

b) Des figures semblables réduites déplacées (F_3) et des figures semblables réduites retournées (F_4).



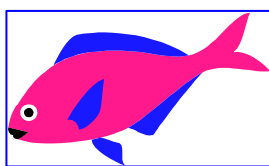
F_3



F_4

Toutes les dimensions sont multipliées par un nombre compris entre 0 et 1 (0 et 1 non compris).

c) Des figures semblables isométriques déplacées (F_5) et des figures semblables isométriques retournées (F_6).



F_5



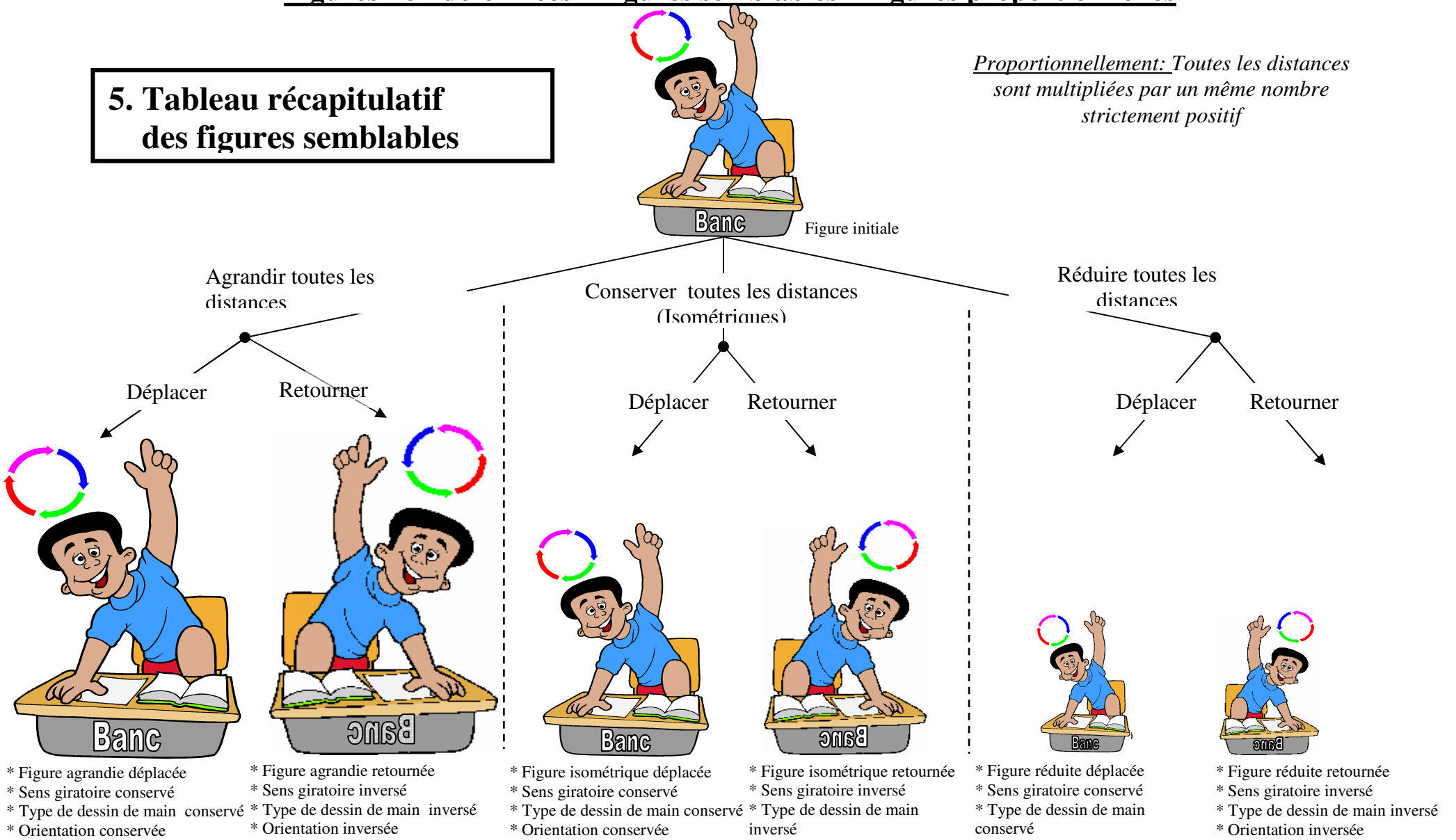
F_6

Toutes les dimensions sont multipliées par 1.

Figures non déformées - Figures semblables - Figures proportionnelles

5. Tableau récapitulatif des figures semblables

Proportionnellement: Toutes les distances sont multipliées par un même nombre strictement positif



6. Types de transformations du plan qui conservent la forme des figures

Il s'agit des types de transformations avec lesquelles on étudie les figures en mathématique élémentaire.

Conserver la forme des figures (les similitudes)

Isométries (planes)

Les isométries sont les transformations qui conservent les distances.

- ◆ Les isométries se composent de deux "sous-familles" : les déplacements et les retournements (*voir à ce sujet, les approches intuitives au point 6.3.2.*)
 - Les déplacements sont les isométries qui conservent les types d'orientations du plan.
 - Les retournements sont les isométries qui inversent les types d'orientations du plan.

- ◆ On peut montrer que dans le plan:
 - les déplacements se réduisent aux rotations (symétries centrales) et aux translations.
 - Les retournements se réduisent aux symétries orthogonales et aux symétries glissées.

Homothéties planes

Introduction :

Les homothéties du plan multiplient toutes les distances de la figure par un nombre réel strictement positif. L'image de cette figure est une figure « parallèle » et proportionnelle à la figure initiale.

Remarque:

Si ce réel est différent de 1, alors l'image de la figure, par l'homothétie considérée, est agrandie ou réduite proportionnellement et est « parallèle » à la figure initiale.

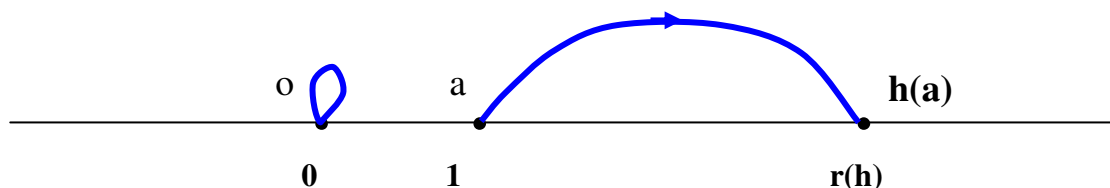
Si ce réel est égal à 1, alors l'image de la figure, par l'homothétie considérée, est isométrique et " parallèle " à la figure initiale.

Une homothétie du plan (h) peut se définir à partir d'un point O (son centre) et d'un nombre réel non nul (positif ou négatif) appelé rapport d'homothétie ($r(h)$).

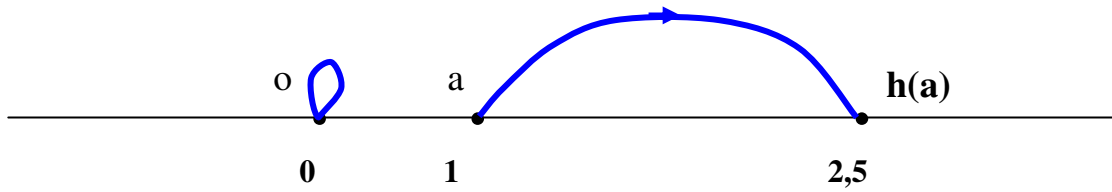
Définition

$$h(o, r(h)) : E^2 \rightarrow E^2$$

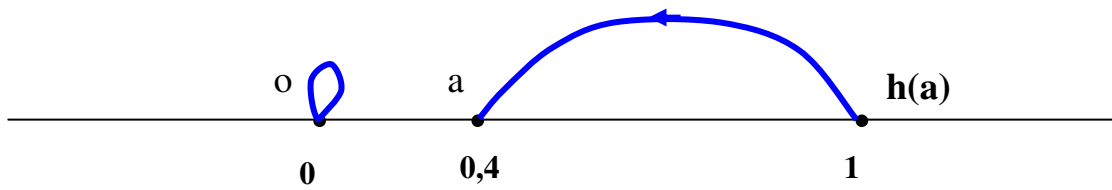
$a \rightarrow h(a)$ où $abs_{(o, a)} h(a) = r(h)$ (L'abscisse de $h(a)$ dans le repère (o, a) vaut $r(h)$.)



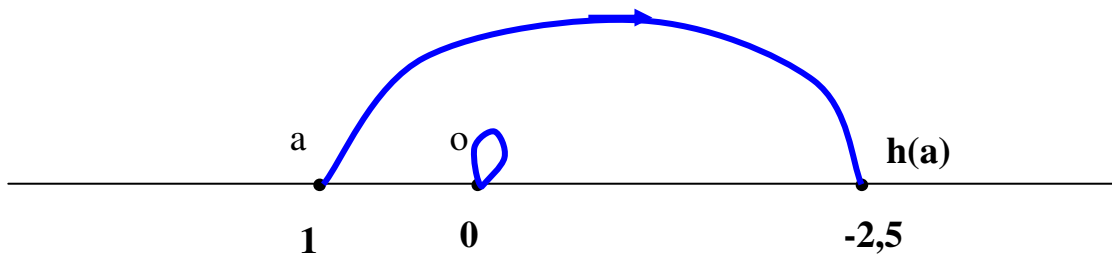
Exemples d'homothéties du plan.



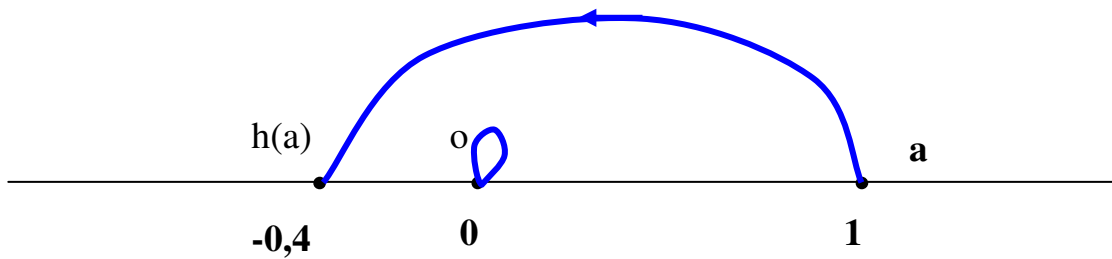
$h(o,2,5)$: homothétie du plan de centre o et de rapport 2,5. Agrandissement – orientation du plan conservée



$h(o,0,4)$: homothétie du plan de centre o et de rapport 0,4. Réduction – orientation du plan conservée



$h(o,-2,5)$: homothétie du plan de centre o et de rapport $-2,5$. Agrandissement – orientation du plan conservée



$h(o,-0,4)$: homothétie du plan de centre o et de rapport $-0,4$. Réduction – orientation du plan conservée

Remarques

Dans le plan:

- il existe des homothéties de rapport positif ou de rapport négatif.
- les homothéties de rapport $+1$ ou de rapport -1 conservent les distances.
- les homothéties du plan multiplient toutes les distances par la valeur absolue du rapport d'homothétie.
- une homothétie du plan de rapport -1 équivaut à une symétrie centrale du plan (un déplacement du plan).
- les homothéties de rapport strictement positif conservent l'orientation du plan.
- les homothéties de rapport strictement négatif conservent l'orientation du plan.
- semblablement aux homothéties, les translations "donnent" également une image parallèle à la figure initiale.

Dans l'espace:

- les homothéties de l'espace de rapport positif conservent les types d'orientations de l'espace (conservent les types de mains ou de pieds).
- les homothéties de l'espace de rapport négatif inversent les types d'orientation de l'espace (inversent les types de mains ou de pieds)).

Similitudes planes

Définition

- Les similitudes planes sont les composées d'homothéties planes avec des déplacements et/ou des retournements du plan.
- Les similitudes planes multiplient toutes les distances par un nombre réel strictement positif.

De cette définition, il résulte que les homothéties du plan et les isométries du plan sont aussi des similitudes planes.

Remarque:

Par une similitude, une figure et son image sont proportionnelles mais non nécessairement parallèles entre elles.

Similitudes directes du plan – Similitudes indirectes du plan

- Les similitudes directes du plan sont les similitudes du plan qui conservent les types d'orientations (qui conservent les types de dessins de mains ou de dessins de pieds).
- Les similitudes indirectes du plan sont les similitudes du plan qui inversent les types d'orientations (qui inversent les types de dessins de mains et de dessins de pieds).

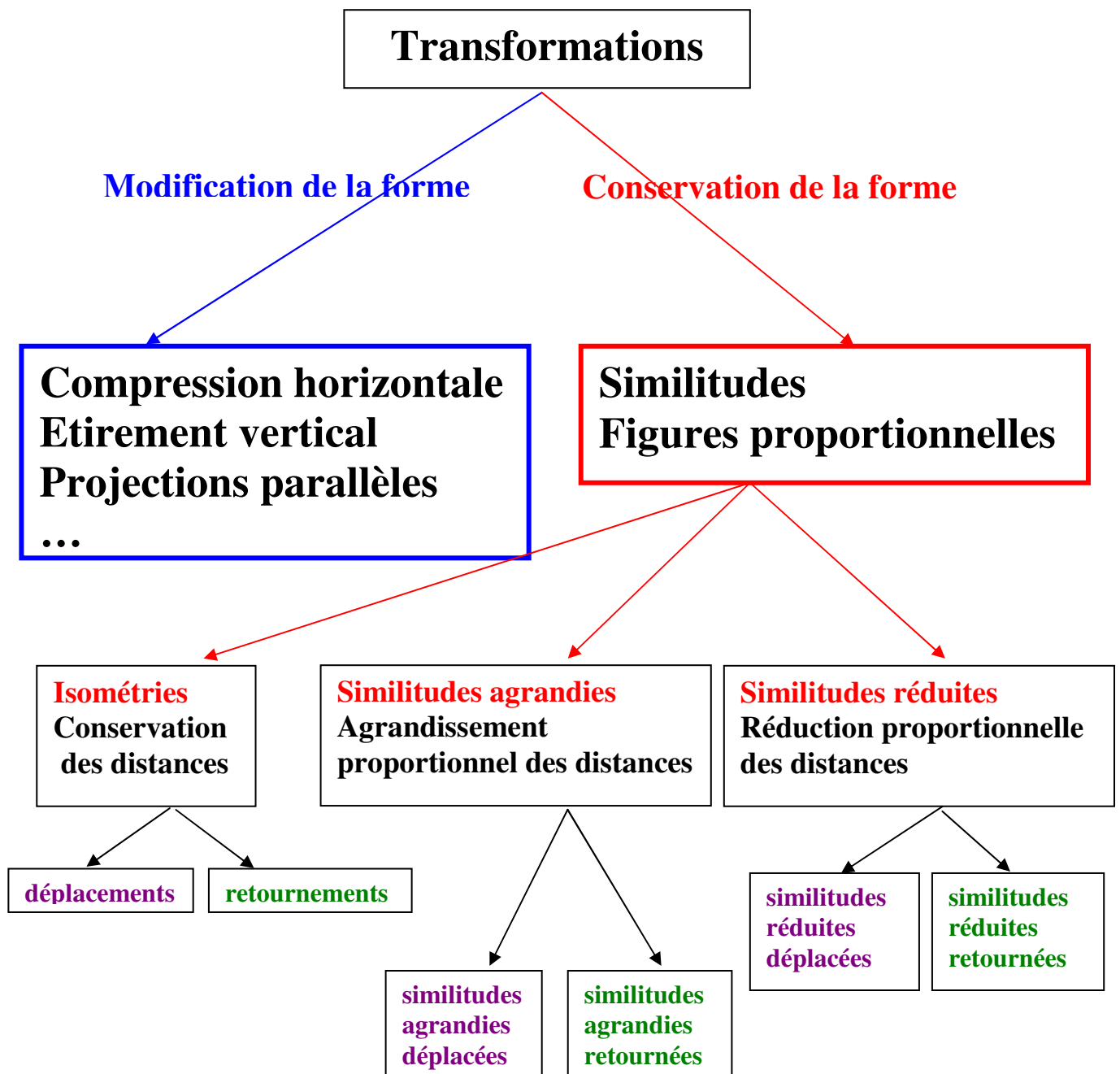
Remarques :

Les similitudes planes conservent ou inversent les types d'orientations du plan selon le nombre de retournements intervenant dans la similitude plane.

- Si le nombre de retournements plans est pair, alors la similitude est directe.
- Si le nombre de retournements plans est impair, alors la similitude est indirecte.

7. Structure des transformations en géométrie élémentaire

Il s'agit des transformations avec lesquelles on peut étudier les figures géométriques et les solides géométriques en mathématique élémentaire.



8. Tableau récapitulatif des isométries du plan

Isométries du plan

Déplacer

Glisser

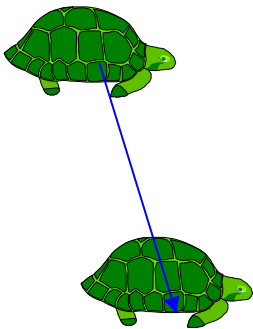
Tourner

Translations

Rotations

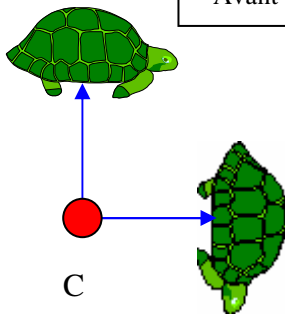
Symétries centrales
(= rotations de 180°)

Avant



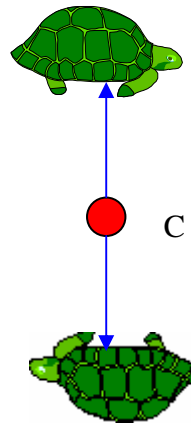
Après

Avant



Après

Avant



Après

Retourner

Symétries orthogonales

Symétries glissées

a

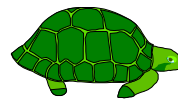


Avant

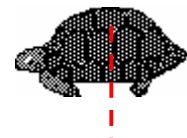


Après

a



Avant



Après

II. Transformations du plan qui ne conservent pas la forme des figures planes

Modifier la forme

Les transformations qui modifient la forme, et "étudiées" en géométrie élémentaire sont les projections parallèles (les projections solaires).